JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques

Astérisque, tome 231 (1995), p. 1-88

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__231__1_0>

231 ASTÉRISQUE

1995

PETITS DIVISEURS EN DIMENSION 1

Jean-Christophe YOCCOZ

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Classification A.M.S. : 30C10, 30C62, 58F03, 58F23, 58F27.

Table des matières

THÉORÈME DE SIEGEL, NOMBRES DE BRUNO ET POLYNÔMES QUADRATIQUES

Jean-Christophe YOCCOZ

Table des matières

INTRODUCTION

1. - L'étude de la dynamique des germes de difféomorphismes holomorphes d'une variable complexe au voisinage d'un point fixe a suscité de nombreux travaux depuis la fin du siècle dernier. Le problème central est de décrire la structure des classes de conjugaison dans le groupe G des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$. A cet effet, on dispose d'un invariant de conjugaison évident, la dérivée du germe en 0 . Notons, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, par G_λ l'ensemble des $f \in G$ tels que $Df(0) = \lambda$. On dira que $f \in G_\lambda$ est linéarisable s'il appartient à la classe de conjugaison dans G de la rotation $R_\lambda(z) = \lambda z$.

Il est raisonnable de considérer d'abord le problème de la conjugaison dans le groupe $\widehat{G}$ des difféomorphismes formels de $(\mathbb{C}, 0)$. Sans problèmes de convergence, la solution n'est pas difficile. Lorsque λ n'est pas racine de l'unité, $\widehat{G}_\lambda$ est une classe de conjugaison de $\widehat{G}$, et plus précisément $\widehat{G}_1$ opère librement et transitivement par conjugaison dans $\widehat{G}_\lambda$. Lorsque $\lambda = \exp(2\pi i p/q)$ (avec $q \geq 1$, $p \wedge q = 1$) est racine de l'unité, la classe de conjugaison de R_λ est formée des éléments de $\widehat{G}_\lambda$ d'ordre q, et les autres classes de conjugaison de $\widehat{G}$ dans $\widehat{G}_\lambda$ forment une famille paramétrée par un entier $n \geq 1$ et un nombre complexe a, car chaque classe contient exactement un difféomorphisme de la forme :

$$f_{n,a}(z) = \lambda z(1 + z^{nq} + az^{2nq}) .$$

Revenant au groupe G, Poincaré a montré ([Po]) que G_λ est une classe de conjugaison de G lorsque le module de λ est différent de 1. Les points fixes attractifs ($|\lambda| < 1$) et répulsifs ($|\lambda| > 1$) des difféomorphismes holomorphes sont donc linéarisables.

Lorsque $\lambda = \exp(2\pi i p/q)$ est racine de l'unité, les travaux d'Ecalle [Ec] et Voronin [Vo] ont produit une classification complète des classes de conjugaison de G contenues dans G_λ : la classe de conjugaison de R_λ est encore formée des éléments de G_λ d'ordre

q, mais les autres classes forment des familles elle-mêmes paramétrées par des germes de difféomorphismes.

Il reste le cas -le plus intéressant- où λ est de module 1 mais n'est pas racine de l'unité. Tout $f \in G_\lambda$ est alors formellement linéarisable par un unique élément $H_f \in \widehat{G}_1$. Une question cruciale est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des valeurs de λ pour lesquelles la conjugaison H_f est convergente pour tout $f \in G_\lambda$; c'est l'ensemble des λ pour lesquels G_λ est une classe de conjugaison de G .

Les formules déterminant les coefficients de H_f font apparaître en dénominateurs des produits de termes $(\lambda^n - \lambda)$ $(n \geq 2)$ qui peuvent être petits et provoquer la divergence de H_f . C'est la situation non linéaire la plus simple où l'on rencontre ces difficultés liées aux "petits dénominateurs".

On s'attend donc à ce que la nature arithmétique de λ joue un rôle prépondérant. Ecrivons λ sous la forme $\exp(2\pi i\alpha)$, avec α irrationnel, et considérons la suite $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ des réduites du développement en fraction continue du nombre α .

Les premiers résultats significatifs, négatifs, sont dus à Cremer [Cr] : il montre que si l'on a :

$$(Cr) \qquad \operatorname*{Sup}_{n\geq 0} \frac{\operatorname{Log} q_{n+1}}{q_n} = +\infty ,$$

alors H_f peut diverger, donc λ n'appartient pas à $\mathcal{S}$.

Le premier résultat positif est obtenu par Siegel en 1942 ; dans un article bref, mais historique [Si], il montre que la condition :

$$(S) \qquad \operatorname{Log} q_{n+1} = \mathcal{O}(\operatorname{Log} q_n)$$

entraîne que tout $f \in G_\lambda$ est linéarisable, c'est-à-dire $\lambda \in \mathcal{S}$. C'est la première fois qu'on surmontait les difficultés liées aux petits dénominateurs. La démonstration de Siegel est cependant propre au problème considéré (c'est une estimation directe et très élégante des coefficients de H_f), et il appartiendra à Kolmogoroff, Arnold, Moser, Herman et beaucoup d'autres, de développer des techniques applicables à des problèmes plus généraux, en particulier aux tores invariants de la mécanique hamiltonienne.

Vers 1965, en suivant l'esprit de la démonstration de Siegel, Bruno ([Br]) établit que G_λ est encore une classe de conjugaison de G sous la condition arithmétique :

$$(B) \qquad \sum \frac{\operatorname{Log} q_{n+1}}{q_n} < +\infty ,$$

moins restrictive que (S). Il restait donc en suspens la situation des nombres λ ne vérifiant ni (B) ni (Cr). Le résultat principal de cet article résout cette question :

THÉORÈME.— *Soit λ un nombre complexe de module 1 qui n'est pas racine de l'unité. Alors la condition (B) est nécessaire et suffisante pour que tout élément de G_λ soit linéarisable.*

Il faut à ce propos mentionner les travaux de Cherry ([Ch]). Vers 1965, sans connaître le résultat de Bruno, il conjecture correctement l'énoncé du théorème ci-dessus. La mort ne lui a malheureusement pas laissé le temps d'achever ses recherches, mais il semble, au vu des manuscrits qu'il a laissés, qu'il avait accompli de sérieux progrès vers la démonstration de ce résultat.

2. - Décrivons maintenant plus en détail le contenu de notre article.

Le premier chapitre est centré autour du théorème ci-dessus, et plus précisément autour d'une version quantitative de ce résultat (Th. I.2.6) qui estime, à une constante multiplicative universelle près, le plus petit rayon de convergence possible de l'application linéarisante $H_f \in \widehat{G}_1$ lorsque f décrit G_λ. Il nous faut ici imposer à f de vérifier une condition de normalisation, car l'application linéarisante de $R_t\, f\, R_t^{-1}$ est $R_t\, H_f\, R_t^{-1}$, et son rayon de convergence est $|t|$ fois celui de H_f : nous demanderons à f d'être holomorphe et injective (univalente) sur le disque unité.

Le premier paragraphe (du premier chapitre) est consacré à des préparatifs arithmétiques autour du développement en fraction continue. Ecrivant $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, avec α irrationnel, nous utilisons, pour des raisons de commodité dans des estimations ultérieures, une légère variante du développement en fraction continue usuel de α. Ce développement nous permet de définir une fonction arithmétique

$$\Phi\ : \mathbb{R} - \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

qui a les propriétés suivantes: elle est paire, $\mathbb{Z}$-périodique, finie exactement aux nombres α vérifiant la condition (B), et vérifie l'équation fonctionnelle fondamentale

$$\Phi(\alpha) = \operatorname{Log}\alpha^{-1} + \alpha\,\Phi(1/\alpha) \quad , \quad 0 < \alpha < 1/2\,.$$

Nous procédons au second paragraphe à quelques réductions préliminaires à la démonstration du résultat principal, énoncé en I.2.6. Pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, notons $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ et S_α la classe des fonctions f injectives et holomorphes dans le disque unité, fixant 0 et y ayant pour dérivée λ. Le Théorème I.2.6 affirme qu'il existe des $f \in S_\alpha$ pour lesquels H_f est divergente lorsque α ne vérifie pas la condition (B), et que le plus petit rayon de convergence R_α de H_f, lorsque f décrit S_α et α vérifie la condition (B), satisfait à l'estimation :

$$\left|\operatorname{Log} R_\alpha^{-1} - \Phi(\alpha)\right| \le C\,,$$

où C est une constante universelle. En fait, il suffit de démontrer l'estimation analogue (mais de contenu plus géométrique) obtenue en remplaçant le rayon de convergence de H_f par la distance d_f de l'origine à l'ensemble des points dont l'orbite positive par f sort du disque unité.

La démonstration du Théorème I.2.6 occupe les Paragraphes 3 à 5 du chapitre I. Le principe de la démonstration est d'analyser le comportement des rayons de convergence (ou plutôt des distances d_f) sous l'action de la transformation $\alpha \mapsto -1/\alpha$ de $PSL_2(\mathbb{Z})$ qui génère le développement en fraction continue (l'autre générateur