JEAN-PIERRE SERRE

Arbres, amalgames, SL_2

Astérisque, tome 46 (1977)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__46__1_0>

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le point de départ de ce travail a été le théorème de Ihara [16] suivant lequel tout sous-groupe discret sans torsion G de $SL_2(\mathbf{Q}_p)$ est un groupe libre. Ce résultat particulièrement frappant était à l'époque (1966) le seul que l'on eut sur la structure des sous-groupes discrets des groupes p-adiques.

La démonstration de Ihara est de nature combinatoire ; elle utilise, de façon quelque peu mystérieuse, une décomposition de $SL_2(\mathbf{Q}_p)$ comme amalgame de deux copies de $SL_2(\mathbf{Z}_p)$. Or, la Topologie suggère une manière naturelle de prouver qu'un groupe G est un groupe libre : il suffit de faire opérer G librement ("sans points fixes") sur un arbre X ; le groupe G s'identifie alors au groupe fondamental $\pi_1(G\backslash X)$ du graphe quotient $G\backslash X$, groupe qui est évidemment libre. Interprétée de ce point de vue, la démonstration de Ihara revient à prendre pour X l'arbre associé à l'amalgame indiqué plus haut ; cet arbre, l'arbre de SL_2 sur le corps $\mathbf{Q}_p$, apparaît alors comme un cas très particulier des immeubles de Bruhat-Tits ([37], [38]), analogues p-adiques des espaces homogènes symétriques des groupes de Lie réels.

On est ainsi amené à préciser les liens qui unissent "arbres", "amalgames" et "SL_2". C'est le sujet du présent travail, qui reprend une partie d'un cours fait au Collège de France en 1968/69 ; le reste de ce cours a été publié ailleurs ([34]).

Il y a deux Chapitres.

Le Chapitre I débute par la définition des amalgames et la structure de leurs éléments (§ 1). On passe de là aux arbres (§ 2), et plus précisément à la question suivante : que peut-on dire d'un groupe G opérant sur un arbre X lorsque l'on connaît le graphe quotient $G\backslash X$ ainsi que les stabilisateurs G_x ($x \in \text{som } X$) et G_y ($y \in \text{ar } X$) des sommets et des arêtes ? On traite d'abord deux cas particuliers :

celui où G opère librement, i.e. où les G_x et les G_y sont réduits à $\{1\}$; le groupe G est alors libre ; ce cas, qui est celui du théorème de Ihara, donne également une démonstration simple du théorème de Schreier disant que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre (§ 3) ;

celui où le graphe $G\backslash X$ est un segment $x \overset{y}{\text{———}} x'$, auquel cas G s'identifie à l'amalgame $G_x *_{G_y} G_{x'}$; de plus, tout amalgame de deux groupes s'obtient ainsi, et de façon unique ; on obtient un dictionnaire commode entre "amalgames" et "groupes agissant sur un arbre avec pour domaine fondamental un segment" (§ 4).

Le cas général fait l'objet du § 5. Dans le cours oral, je m'étais borné à en suggérer la possibilité, sans faire aucune vérification. La forme définitive des définitions et des théorèmes, ainsi que les démonstrations, sont dues à H. Bass. Le résultat principal dit, en gros, que l'on peut reconstituer G à partir de $G\backslash X$ et des stabilisateurs G_x et G_y : c'est le "groupe fondamental" d'un "graphe de groupes" porté par $G\backslash X$; inversement, tout graphe de groupes s'obtient ainsi, de façon essentiellement unique. Ici encore, on dispose d'une "forme normale" pour les éléments de G . Le cas où $G\backslash X$ est un lacet  conduit aux groupes "de type (HNN)" .

Le § 6 étudie les relations entre "amalgames" et "points fixes". Il montre que certains groupes, tels $SL_3(\mathbf{Z})$, $Sp_4(\mathbf{Z})$, etc, ont toujours des points fixes, lorsqu'ils opèrent sur des arbres ; cela prouve que ce ne sont <u>pas</u> des amalgames. Une première version de ces résultats a été publiée ailleurs (Lect. Notes in Math. n° 372, Springer-Verlag, 1974, p. 633-640).

Le Chapitre II commence par la définition et les principales propriétés de l'arbre X attaché à un espace vectoriel V de dimension 2 sur un corps local K (§ 1). Les <u>sommets</u> de cet arbre sont les classes de <u>réseaux</u> de V , deux réseaux étant dans la même classe s'ils sont homothétiques, i.e. s'ils ont le même stabilisateur dans $GL(V)$; deux sommets sont liés si on peut les représenter par des réseaux emboîtés dont le quotient est de longueur 1 ; on reconnaît là la notion de "réseaux voisins" qui intervient dans la définition classique de l'opérateur