BERNARD HELFFER

Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques

Astérisque, tome 112 (1984)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__112__R1_0>

0. INTRODUCTION

L'objet de ce cours est double. D'une part, nous avons voulu présenter dans un cas particulier une partie des résultats obtenus avec D. Robert durant les années 80-81 concernant la théorie spectrale des opérateurs pseudodifférentiels globalement elliptiques sur $\mathbb{R}^n$ et d'autre part nous avons essayé de familiariser le lecteur avec une théorie des opérateurs Fourier-intégraux. On s'est efforcé de partir d'un niveau élémentaire et il n'est en principe pas nécessaire de connaître la théorie classique des Fourier-intégraux ni la théorie spectrale. Les spécialistes pourront se passer d'une lecture détaillée du chapitre I. Dans le cas particulier considéré dans ce cours, les résultats que nous avons obtenus avec D. Robert peuvent être également obtenus en utilisant les opérateurs de Toeplitz. On renvoie aux notes situées à la fin de ce cours pour la présentation des travaux de Guillemin-Sternberg, Boutet de Monvel - Guillemin et Boutet de Monvel. Les théories développées par ces auteurs ont sans doute une portée théorique plus générale et mettent mieux en évidence les analogies avec la théorie spectrale pour les opérateurs elliptiques sur les variétés compactes qui n'apparaissent dans notre cours que sur un plan technique. Toutefois ces théories sont difficiles et une approche directe nous semble utile et a conduit dans notre article avec D. Robert à des généralisations qui sortent du champ d'application de ces théories.

La meilleure introduction à ce cours nous semble être de rappeler brièvement les propriétés de l'oscillateur harmonique qui constitue le modèle le plus simple de la théorie.

Considérons donc l'opérateur :

(0.1) $$P = \frac{1}{2} (- \partial_x^2 + x^2)$$

il est bien connu que cet opérateur admet une suite de valeurs propres de multiplicité 1 :

(0.2) $$\lambda_j = (j + \frac{1}{2}), \quad j \in N$$

et que les fonctions propres de norme 1 correspondantes sont les fonctions d'Hermite:

(0.3) $$h_j(x) = c_j(\frac{d}{dx} - x)^j \, e^{\frac{-x^2}{2}} \quad .$$

On introduit classiquement en théorie spectrale la fonction de comptage :

(0.4) $$N(\lambda) = \{\# j,\ \lambda_j \leqslant \lambda\}\ .$$

Un calcul élémentaire montre alors que l'on a :

(0.5) $N(\lambda) = \lambda + O(1)$ lorsque λ tend vers l' ∞ .

Q1- La question qui se pose est de savoir si on peut retrouver ce comportement asymptotique sans utiliser le calcul explicite des valeurs propres qui n'est pas possible en général (exemple : $P = \partial_x^4 + x^4$).

La relation (0.2) déterminant les valeurs propres est très particulière; pour des opérateurs plus généraux, on se posera la question de savoir si on a des résultats voisins, à savoir : Existe-t-il $\zeta > 0$, $\tilde{\sigma}$ et $C \geqslant 0$ tel que les puissances ζ des valeurs propres de l'opérateur considéré soient contenues dans la réunion d'intervalles de la forme :

$$I_j = [\tilde{\sigma} + j - C/j\ ,\ \tilde{\sigma} + j + C/j],\ j \in \mathbb{N}$$

(Pour l'oscillateur harmonique, on peut prendre $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}$ et $C = 0$).

Q2- Peut-on expliquer ce phénomène sans revenir à un calcul explicite des valeurs propres ?

Enfin, si on considère la distribution tempérée sur R :

(0.5)' $$S(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-it\lambda_j} = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-it(j+1/2)}$$

on vérifie aisément que le support singulier de cette distribution est exactement $2\pi\,\mathbb{Z}$.

Q3- Sous quelles conditions observe-t-on un tel phénomène ?

L'idée directrice, pour répondre à ces questions, provient du lien entre la mécanique classique et la mécanique quantique.

A l'oscillateur harmonique, on associe son symbole :

(0.6) $$p(x,\xi) = \frac{\xi^2 + x^2}{2}$$

et le flot hamiltonien de p, c'est-à-dire le flot associé au champ de vecteur sur $\mathbb{R}^2$ (ou plutôt $\mathbb{R}^2 \setminus 0$)

(0.7) $$H_p = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi), -\frac{\partial p}{\partial x}(x,\xi) \right) = (\xi,-x) .$$

On résout pour cela les équations :

(0.8) $$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(t,y,\eta) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x(t,y,\eta), \xi(t,y,\eta)) \quad (= \xi(t,y,\eta)) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t}(t,y,\eta) = -\frac{\partial p}{\partial x}(x(t,y,\eta), \xi(t,y,\eta)) \quad (= -x(t,y,\eta)) \\ x(0,y,\eta) = y \\ \xi(0,y,\eta) = \eta \end{cases} \quad (y,\eta) \in \mathbb{R}^2$$

Le flot Φ_t est alors défini comme l'application :

(0.9) $$(y,\eta) \longrightarrow \Phi_t(y,\eta) = (x(t,y,\eta), \xi(t,y,\eta)) .$$

Dans le cas considéré ici, on a :

(0.10) $$\Phi_t(y,\eta) = (y \cos t + \eta \sin t, -y \sin t + \eta \cos t)$$

On observe ici que le flot Φ_t est périodique de plus petite période $\tilde{T} = 2\pi$.

On verra au chapitre (IV) que c'est cette propriété qui permet de donner une réponse aux questions (Q2) et (Q3).

Considérons pour $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \, (k \in \mathbf{Z})$ la fonction :

(0.11) $$S(t,x,\eta) = -\frac{x^2+\eta^2}{2} \operatorname{tg} t + \frac{x\eta}{\cos t}$$

S vérifie le système :

$$\begin{cases} \partial_t S(t,x,\eta) + p(x,\partial_x S(t,x,\eta)) = 0 \\ S(0,x,\eta) = x\eta \end{cases} \quad |t| < \frac{\pi}{2}$$

appelé équation eiconale et a la propriété que l'ensemble :

(0.12) $$\{(x,\partial_x S(t,x,\eta), \partial_\eta S(t,x,\eta),\eta), \ x, \eta \in \mathbb{R}^2\}$$

est égal au graphe de Φ_t .

Par ailleurs, le noyau distribution de (e^{-itP}) s'écrit pour $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$
\begin{aligned}
(e^{itP})(x,y) &= \\
&= (2\pi)^{-1}[|\cos t|^{-1/2} \int e^{i[S(t,x,\eta)-y.\eta]}.d\eta]. \\
&\quad . e^{-i\pi(k+1)/2}
\end{aligned}
\tag{0.13}
$$

si $\frac{\pi}{2} + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Cette dernière propriété est facile à vérifier pour $|t| < \frac{\pi}{2}$ mais plus délicate pour t quelconque. Le coefficient $e^{-i\pi(k+1)/2}$ s'interprète comme un terme lié à l'indice de Maslov dont nous ne parlerons pas. Les techniques développées dans ce cours permettent cependant de retrouver cette expression (cf. §3.4).

Remarquons qu'il apparaît en (0.13) le noyau d'un opérateur Fourier-intégral qui s'écrit à l'aide d'une phase :

$$\phi_t(x,\eta,y) = S(t,x,\eta)-y.\eta \tag{0.14}$$

et d'une amplitude

$$a_t(x,\eta,y) = (2\pi)^{-1} e^{-i\pi(k+1)/2} |\cos t|^{-1/2} \quad . \tag{0.15}$$

Cette phase a la propriété d'homogénéité suivante :

$$
\begin{gathered}
\Phi_t(\lambda x,\lambda\eta,\lambda y) = \lambda^2 \Phi_t(x,\eta,y) \\
\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \\
\forall (x,\eta,y) \in \mathbb{R}^3 \quad .
\end{gathered}
$$

Ce type de propriété sera le point de départ de l'introduction de notre théorie des opérateurs Fourier-Intégraux.

Remarquons pour terminer que le noyau distribution de (e^{-itP}) s'écrit aussi sous la forme :

$$
\begin{aligned}
(e^{-itP})(x,y) &= \sum_j e^{-it\lambda_j}.h_j(x).\overline{h}_j(y) \\
&= \sum_j e^{-it(j+1/2)}h_j(x).\overline{h}_j(y) \quad .
\end{aligned}
\tag{0.17}
$$

On voit sur cette formule que S(t) défini en (0.5) est également :

$$S(t) = \int (e^{-itP})(x,x)dx$$