MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS DIGNE
JEAN MICHEL

Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 20 (1985)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1985_2_20__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 20
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 113, 1985, fascicule 3

FONCTIONS L DES VARIÉTÉS DE DELIGNE-LUSZTIG ET DESCENTE DE SHINTANI

par François DIGNE et Jean MICHEL (*)

Résumé: Dans ce mémoire, nous étudions les fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig d'un groupe réductif G sur un corps fini. Nous exprimons ces fonctions à l'aide des caractères de l'algèbre de Hecke et de descentes de Shintani des caractères du groupe des points de G sur une extension du corps de base. Ceci permet de comparer ces descentes pour les différentes extensions finies du corps. Nous montrons la périodicité de ces descentes en fonction du degré de l'extension. Après avoir exposé l'exemple des groupes de type G_2, nous développons une conjecture générale sur la décomposition des descentes de Shintani des caractères unipotents et la rattachons aux résultats connus et à une conjecture de Kawanaka.

Abstract: In this paper, we study L-functions of the Deligne-Lusztig varieties of a reductive group G defined on a finite field. These functions are computed in terms of characters of the Hecke algebra and of Shintani "descents" of characters of the group of rational points of G over an extension of the base field. We show that the L-functions are periodic functions of the degree of the extension. We then explain the example of groups of type G_2 and make a general conjecture about the decomposition of Shintani descents of unipotent characters. We show how this conjecture is related to known results and to a conjecture by Kawanaka.

(*) Texte reçu le 11 février 1985, révisé le 18 novembre 1985

0037-9484/85-03/1-146/$ 16.60/ © Gauthier-Villars

Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

SOMMAIRE

Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

0 INTRODUCTION

Le principal objet du présent travail est l'étude des fonctions $\mathcal{L}$ des variétés de Deligne-Lusztig X_w d'un groupe algébrique réductif G défini sur $\mathbb{F}_q$, et le résultat principal est que ces fonctions $\mathcal{L}$ s'expriment à l'aide des caractères de l'algèbre de Hecke H_m de la représentation $E_m = \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_{q^m})}^{G(\mathbb{F}_{q^m})} 1$ et de "descentes de Shintani" de $G(\mathbb{F}_{q^m})$ à $G(\mathbb{F}_q)$ des caractères de $G(\mathbb{F}_{q^m})$ intervenant dans E_m, ces descentes de Shintani étant des fonctions périodiques de m.

Précisément, si F est l'endomorphisme de Frobenius correspondant à la structure rationnelle de G et si W est le groupe de Weyl de G, on a pour tout $g \in G(\mathbb{F}_q)$ et pour tout m multiple de l'ordre δ de F sur W :

$$|X_w^{gF^m}| = \sum_{\tilde{\psi}} \tilde{\psi}(T_w F) (\mathrm{Sh}_{F^m/F} U_{\tilde{\psi}}) (g) \qquad (\underline{\text{cf}}. \text{ III } 3)$$

où $\tilde{\psi}$ parcourt un ensemble formé d'une extension à $H_m \rtimes \langle F \rangle$ de chaque caractère F-invariant de H_m et où $\mathrm{Sh}_{F^m/F} U_{\tilde{\psi}}$ est la descente de Shintani d'une extension $U_{\tilde{\psi}}$ à $G(\mathbb{F}_{q^m}) \rtimes \langle F \rangle$ du caractère U_ψ de $G(\mathbb{F}_{q^m})$ correspondant à la restriction ψ à H_m de $\tilde{\psi}$.

De plus, pour tout m multiple de δ , on a :

$$\mathrm{Sh}_{F^m/F} U_{\tilde{\psi}} = \sum_V c_{V,\psi}\, \omega_V^{m/\delta}\, V \qquad (\underline{\text{cf}}. \text{ III } 3)$$

où V parcourt l'ensemble des caractères unipotents de G^F , où $c_{V,\psi} \in \mathbb{Q}$ et où ω_V est une racine de l'unité.

Ces résultats sont plus généraux que ceux qui ont été trouvés indépendamment par Asai [AS1] et leur annonce dans [DM1] et [DM5] a été utile à Lusztig pour compléter son travail [L3] sur la décomposition des caractères de Deligne-Lusztig.

L'organisation des chapitres est comme suit :

Dans le chapitre I nous exprimons les fonctions $\mathcal{L}$ des variétés X_w à l'aide des nombres de points fixes de gF^m sur ces variétés, et donnons les premières propriétés de ces nombres de points fixes (rapport avec les caractères de Deligne-Lusztig, induction à la Harish-Chandra) ; puis nous définissons la "descente de Shintani" dans le cadre d'un groupe muni de deux automorphismes qui commutent, et vérifiant pour ces deux automorphismes l'analogue du théorème de Lang sur l'endomorphisme de Frobenius (généralisant ainsi les constructions de Shintani [SH] et Kawanaka [K1]).

Le chapitre II est consacré aux résultats nécessaires sur les algèbres de Hecke et sur certaines algèbres de Frobenius de la forme $H \rtimes \langle F \rangle$, formées du produit semi-direct d'une algèbre de Hecke H par un automorphisme F provenant d'un automorphisme du diagramme de Coxeter. Nous donnons une généralisation des résultats de [BC] sur la rationalité des caractères des algèbres de Hecke à ces algèbres et aux algèbres génériques correspondantes, ainsi qu'une généralisation du théorème de spécialisation classique pour les algèbres de Hecke.

Le chapitre III expose la démonstration du théorème principal. Nous exprimons d'abord les nombres de points fixes $|X_w^{gF^m}|$ à l'aide des caractères de l'algèbre H_m et de descentes de Shintani des caractères de $G(\mathbf{F}_{q^m})$; puis, en utilisant les résultats du chapitre II sur la rationalité des caractères des algèbres de Hecke, nous montrons que les coefficients qui interviennent sont produit d'un nombre rationnel $c_{V,\psi}$ par la puissance m-ième d'une racine de l'unité ω_V et par un polynôme en q^m. Ceci permet de "passer à la limite pour $m = 0$", ce qui lie les coefficients $c_{V,\psi}$ à la décomposition des caractères de Deligne-Lusztig R_w^1.

Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

Dans le reste du chapitre III nous donnons divers résultats donnant des précisions sur les nombres $c_{V,\psi}$, utilisant d'abord les propriétés des groupes linéaires, puis en utilisant une désingularisation de la variété $\bar{X}_w$, et enfin en utilisant l'opérateur de dualité de Curtis.

Les résultats du chapitre III montrent que l'étude de la décomposition des caractères R_w^1 se ramène, pour les groupes déployés, à l'étude de la descente de Shintani Sh de $G(\mathbb{F}_q)$ à $G(\mathbb{F}_q)$; le chapitre IV est consacré à cette étude.

Nous donnons d'abord des résultats généraux sur l'opérateur Sh , en particulier au paragraphe 2 nous montrons que Sh commute au foncteur de Lusztig R_L^G , généralisant ainsi le résultat de notre note [DM2] ; puis nous décrivons l'action de Sh dans le cas des groupes classiques et d'un groupe de type G_2 .

Dans le chapitre V, nous développons l'exemple du caractère de Deligne-Lustig R_w^1 , où w est l'élément de Coxeter, dans le groupe Gl_n ; il est possible, dans ce cas, d'obtenir des résultats explicites par une méthode combinatoire.

Dans le chapitre VI, nous montrons comment, pour un groupe de type G_2, déterminer les descentes de Shintani des caractères unipotents de la série principale et les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius sur les variétés de Deligne-Lusztig à partir de la table des caractères de l'algèbre de Hecke.

Dans le chapitre VII, nous développons une conjecture générale sur les décompositions des descentes de Shintani des caractères unipotents en indiquant quelle partie de cette conjecture peut être prouvée par nos méthodes. En particulier (VII, 2) nous montrons comment calculer les "valeurs propres" ω_V de l'endomorphisme de Frobenius attachées au caractère V, et nous prouvons le cas $m=1$ de la conjecture pour certains groupes (VII, 4). Asaï a récemment prouvé le cas $m=1$ de cette conjecture en toute généralité ([AS2], [AS3], [AS4]). Enfin, nous montrons qu'une conjecture récente de Kawanaka ([K2]), que celui-ci a démontrée dans le cas où m est premier à l'ordre du groupe $G(\mathbf{F}_q)$ (cf [K3]) est conséquence de notre conjecture. Pour ce faire, nous introduisons une base de l'espace engendré par les caractères unipotents "transformée de Mellin" de la base canonique. Dans cette base, les opérateurs considérés (en particulier la descente de Shintani) ont des expressions particulièrement simples.

Les constants encouragements et les nombreuses suggestions de P. Cartier ont été essentiels à la réalisation de ce travail. Nous remercions également G. Lusztig dont les travaux ont un rôle fondamental dans la théorie, et avec Lequel nous avons eu une discussion profitable sur la démonstration du théorème principal. Enfin nous remercions M. Broué, L. Puig et les autres membres de l'équipe des groupes finis de Paris qui nous ont accueillis dans leur séminaire, où nous avons pu exposer nos résultats et en discuter.

Nos remerciements vont également à M. Demazure et J. Giraud qui ont accepté de faire partie des jurys des thèses* dont ce mémoire fait partie, ainsi qu'à F. Ledrappier et H. Cohen qui nous ont fourni d'intéressant sujets de seconde thèse.

J. Tits nous a fait l'honneur de présider ces jurys.

La frappe du présent mémoire a été assurée par Maryse Loiseau et Claire Michel, qu'elles trouvent ici nos remerciements.

*Thèses soutenues en juin 1984 àl'Université de Paris XI.

Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

I DEFINITIONS ET NOTATIONS

0. Notations.

Soit X un ensemble (resp. une variété algébrique), et soit g un automorphisme de X. On note ${}^g x$ l'image de l'élément x de X par l'action de g, et X^g l'ensemble (resp. la sous-variété) des points fixes de X sous l'action de g.

En particulier, si X est un sous-groupe d'un groupe G, et si $g \in G$ normalise X, on fait agir g par conjugaison sur X, et on écrit donc ${}^g x$ pour gxg^{-1}.

Si H est un groupe fini et X l'ensemble des caractères de H, on fait agir $G = \mathrm{Aut}(H)$ sur X en posant : ${}^g\chi({}^g h) = \chi(h)$, pour tout $\chi \in X$, tout $g \in G$, et tout $h \in H$.

Si H est un groupe fini ou une algèbre semi-simple, on note $\hat{H}$ l'ensemble des caractères irréductibles de H.

Dans toute la suite, si G est un groupe fini, l'ensemble des fonctions sur G à valeurs complexes sera muni du produit scalaire défini par :

$$< f,g >_G = |G|^{-1} \sum_{x \in G} \overline{f(x)}\, g(x) \quad .$$

Enfin, on note $|X|$ ou $\# X$ le cardinal d'un ensemble fini X.

Nous désignerons toujours par $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments de caractéristique p et par $\overline{\mathbb{F}}_q$ sa clôture algébrique. Si nous considérons une variété algébrique sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ définie sur $\mathbb{F}_q$, nous noterons F l'endomorphisme de Frobenius correspondant.

Pour tout nombre premier l différent de p, nous noterons $\overline{\mathbb{Q}}_l$ une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_l$ des nombres l-adiques, et nous supposerons choisis des isomorphismes $i_l : \overline{\mathbb{Q}}_l \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Nous identifierons toute fonction f à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ à la fonction $i_l \circ f$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.