MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRE BERTHELOT

Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique *p*

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 23 (1986), p. 7-32
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_23__R3_0>

Société Mathématique de France
2e Série, Mémoire n° 23, 1986, p. 7-32

GÉOMÉTRIE RIGIDE ET COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE CARACTÉRISTIQUE p

par Pierre BERTHELOT[1]

Depuis une vingtaine d'années, le problème de la définition d'une théorie cohomologique "p-adique" pour les variétés algébriques sur un corps k de caractéristique p a suscité de nombreux travaux. Les théories qui ont été introduites sont en gros de deux types :

a) La cohomologie de Dwork-Monsky-Washnitzer.

Dans diverses situations (hypersurfaces [6 ; 7 ; 8 ; 9] , revêtements d'Artin-Schreier [10], etc), Dwork a construit et étudié des groupes de cohomologie, munis d'une action de Frobenius, et dont la variation, dans le cas d'une famille de variétés, est contrôlée par une équation différentielle. L'idée de considérer des espaces de séries formelles "surconvergentes", qui est à la base de la théorie de Dwork, a été reprise par Monsky et Washnitzer [23 ; 24 ; 25], grâce à la notion d'algèbre "faiblement complète" : ils ont défini une théorie cohomologique pour les variétés affines et lisses, en prenant la cohomologie du complexe des formes différentielles à coefficients dans une algèbre faiblement complète relevant l'algèbre affine d'une telle variété. Mentionnons aussi, dans le même ordre d'idées, les travaux de Lubkin sur l'homologie p-adique [22], basés sur l'emploi de faisceaux d'algèbres faiblement complètes.

----

(1) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 305.

0037-9484/1986/02 7 26 /$ 4.60 © Gauthier-Villars

b) La cohomologie cristalline.

Motivée notamment par l'étude de phénomènes spécifiques aux variétés de caractéristique p et reliés à la p-torsion de la cohomologie, la cohomologie cristalline fournit des modules de cohomologie sur l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (supposé parfait pour simplifier), grâce à une technique permettant d'intégrer les formes différentielles par rapport à certains paramètres : l'adjonction formelle de "puissances divisées" à un idéal. Pour les variétés propres et lisses, cette méthode fournit une théorie ayant les propriétés usuelles des théories cohomologiques [2 ; 4 ; 15] , et les phénomènes de torsion sont maintenant bien compris, grâce aux travaux d'Illusie, Raynaud et Ekedahl sur le complexe de De Rham-Witt [16 ; 17 ; 18 ; 19]. En dehors du cas propre et lisse, la théorie est par contre moins satisfaisante, d'une part parce qu'elle ne prend pas en compte les phénomènes de surconvergence dans le cas non propre, d'autre part parce qu'elle introduit une pathologie particulière aux algèbres à puissances divisées dans le cas singulier.

Nous allons ici expliquer comment ces deux théories peuvent s'interpréter du point de vue de la géométrie analytique rigide (à torsion près en ce qui concerne la cohomologie cristalline), et montrer comment cette interprétation mène à une généralisation commune, la "cohomologie rigide" ; celle-ci devrait fournir, pour les schémas séparés de type fini sur un corps de caractéristique $p>0$, une théorie ayant des propriétés analogues à celles de la cohomologie ℓ-adique, pour $\ell \neq p$, ou de la cohomologie de De Rham en caractéristique 0 (au sens de [14]). Dans le cadre de cet exposé, nous chercherons seulement à expliciter les idées qui permettent de définir une telle théorie ; les démonstrations seront publiées ailleurs [3 a]. Nous renvoyons d'autre part à [3] pour un exemple des liens étroits qui existent entre cette théorie et les travaux de Dwork, Sperber [29 ; 30], Adolphson-Sperber [1], Robba [28],... . Indiquons simplement ici le principe qui semble se dégager : les espaces de "cohomologie analytique" étudiés dans ces articles (munis de leur Frobenius et éventuellement du système différentiel qui contrôle la variation de ces espaces) s'interprètent comme certains faisceaux de cohomologie rigide associés à une famille de variétés en caractéristique p, faisceaux qui possèdent dans les cas considérés une structure naturelle de "F-cristal surconvergent" (cf. § 4) ; d'autre part, la "théorie duale" est l'étude de la cohomologie rigide à support propre dans la même situation.

Ce travail est le prolongement d'une réflexion menée avec Ogus sur la cohomologie cristalline "à isogénie près" [5], et c'est un plaisir de le remercier pour les nombreuses et stimulantes discussions que nous avons eues. En particulier, la notion de "cristal convergent" explicitée en 4.1 a été dégagée au cours d'un travail commun, et correspond à celle qu'étudie Ogus dans le cadre de la géométrie formelle dans [26].

On désignera par K un corps de caractéristique 0, complet pour une valeur absolue non archimédienne ; on notera $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel, supposé de caractéristique $p > 0$, et $\Gamma^* := |K^*| \otimes \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^*$, où $|K^*|$ est le groupe multiplicatif des valeurs absolues des éléments non nuls de K. Enfin, pour tout anneau topologique A, $A\{t_1,\dots,t_n\}$ désignera l'anneau des séries formelles restreintes (i.e. dont les coefficients tendent vers 0) à coefficients dans A.

1. Tubes et cohomologie naïve.

Le lien entre les schémas sur k et les espaces analytiques rigides sur K s'établit par l'intermédiaire des schémas formels sur $\mathcal{V}$, grâce à la construction de la fibre générique d'un schéma formel, due à Raynaud [27].

(1.1) Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre séparée et complète pour la topologie p-adique. Rappelons que le $\mathcal{V}$-schéma formel affine $P := \mathrm{Spf}(A)$ a pour espace topologique sous jacent celui de $P_n := \mathrm{Spec}(A/p^nA)$ (qui est aussi celui de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$), et pour faisceau d'algèbres le faisceau $\mathcal{O}_P := \varprojlim_n \mathcal{O}_{P_n}$. Un $\mathcal{V}$-<u>schéma formel</u> est un espace topologique P muni d'un faisceau de $\mathcal{V}$-algèbres $\mathcal{O}_P$, possédant un recouvrement ouvert (P_i) tel que $(P_i, \mathcal{O}_P|_{P_i})$ soit un $\mathcal{V}$-schéma formel affine ; les morphismes de $\mathcal{V}$-schémas formels sont définis de manière évidente. Nous dirons que P est de <u>type fini</u> si P possède un recouvrement fini par des ouverts affines de la forme $\mathrm{Spf}(A_i)$, où A_i est quotient d'une algèbre $\mathcal{V}\{t_1, \ldots, t_n\}$, et que P est <u>séparé</u> si le morphisme diagonal est une immersion fermée ; tous les schémas et schémas formels considérés ici seront supposés séparés et de type fini. Si $u : P' \longrightarrow P$ est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels, on dira que u est lisse si sa réduction modulo p^n est un morphisme lisse pour tout n.

A tout $\mathcal{V}$-schéma formel P, on associe un espace analytique rigide $\tilde{P}$ sur K de la façon suivante.

(i) Si $P = \mathrm{Spf}(A)$, où A est quotient de $\mathcal{V}\{t_1, \ldots, t_n\}$, alors $A \otimes K$ est une algèbre de Tate, et on définit $\tilde{P}$ par $\tilde{P} := \mathrm{Sp}(A \otimes K)$. On observe que, si $x \in \mathrm{Sp}(A \otimes K)$ correspond à un idéal maximal $\mathfrak{a} \subset A \otimes K$, l'image R de A dans $K(x) := (A \otimes K)/\mathfrak{a}$ est une $\mathcal{V}$-algèbre finie, plate et intègre. Réciproquement, la donnée d'un tel quotient R de A détermine par tensorisation avec K un idéal maximal de $A \otimes K$.

(ii) On tire de cette remarque la description des points de $\tilde{P}$ dans le cas général : par définition, les points de $\tilde{P}$ sont les sous-schémas formels fermés de P, intègres, finis et plats sur $\mathcal{V}$. L'algèbre R d'un tel sous-schéma Z est une $\mathcal{V}$-algèbre locale, telle que $R/\mathfrak{m}R$ soit artinienne. En particulier, le support de Z est réduit à un point $z \in P$, qu'on appellera <u>spécialisation</u> du point $x \in \tilde{P}$ correspondant à Z.

(iii) Soit $sp : \tilde{P} \longrightarrow P$ l'application qui à $x \in \tilde{P}$ associe sa spécialisation. Si $U \subset P$ est un ouvert affine, $sp^{-1}(U)$ est en bijection avec $\tilde{U}$, et est donc muni d'une structure d'espace analytique rigide. On vérifie que, pour U