PIERRE BERTHELOT

Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 23 (1986), p. 7-32

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_23__R3_0>

Société Mathématique de France
2e Série, Mémoire n° 23, 1986, p. 7-32

GÉOMÉTRIE RIGIDE ET COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE CARACTÉRISTIQUE p

par Pierre BERTHELOT[1]

Depuis une vingtaine d'années, le problème de la définition d'une théorie cohomologique "p-adique" pour les variétés algébriques sur un corps k de caractéristique p a suscité de nombreux travaux. Les théories qui ont été introduites sont en gros de deux types :

a) La cohomologie de Dwork-Monsky-Washnitzer.

Dans diverses situations (hypersurfaces [6 ; 7 ; 8 ; 9] , revêtements d'Artin-Schreier [10], etc), Dwork a construit et étudié des groupes de cohomologie, munis d'une action de Frobenius, et dont la variation, dans le cas d'une famille de variétés, est contrôlée par une équation différentielle. L'idée de considérer des espaces de séries formelles "surconvergentes", qui est à la base de la théorie de Dwork, a été reprise par Monsky et Washnitzer [23 ; 24 ; 25], grâce à la notion d'algèbre "faiblement complète" : ils ont défini une théorie cohomologique pour les variétés affines et lisses, en prenant la cohomologie du complexe des formes différentielles à coefficients dans une algèbre faiblement complète relevant l'algèbre affine d'une telle variété. Mentionnons aussi, dans le même ordre d'idées, les travaux de Lubkin sur l'homologie p-adique [22], basés sur l'emploi de faisceaux d'algèbres faiblement complètes.

----

(1) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 305.

0037-9484/1986/02 7 26 /$ 4.60 © Gauthier-Villars

b) La cohomologie cristalline.

Motivée notamment par l'étude de phénomènes spécifiques aux variétés de caractéristique p et reliés à la p-torsion de la cohomologie, la cohomologie cristalline fournit des modules de cohomologie sur l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (supposé parfait pour simplifier), grâce à une technique permettant d'intégrer les formes différentielles par rapport à certains paramètres : l'adjonction formelle de "puissances divisées" à un idéal. Pour les variétés propres et lisses, cette méthode fournit une théorie ayant les propriétés usuelles des théories cohomologiques [2 ; 4 ; 15] , et les phénomènes de torsion sont maintenant bien compris, grâce aux travaux d'Illusie, Raynaud et Ekedahl sur le complexe de De Rham-Witt [16 ; 17 ; 18 ; 19]. En dehors du cas propre et lisse, la théorie est par contre moins satisfaisante, d'une part parce qu'elle ne prend pas en compte les phénomènes de surconvergence dans le cas non propre, d'autre part parce qu'elle introduit une pathologie particulière aux algèbres à puissances divisées dans le cas singulier.

Nous allons ici expliquer comment ces deux théories peuvent s'interpréter du point de vue de la géométrie analytique rigide (à torsion près en ce qui concerne la cohomologie cristalline), et montrer comment cette interprétation mène à une généralisation commune, la "cohomologie rigide" ; celle-ci devrait fournir, pour les schémas séparés de type fini sur un corps de caractéristique $p>0$, une théorie ayant des propriétés analogues à celles de la cohomologie ℓ-adique, pour $\ell \neq p$, ou de la cohomologie de De Rham en caractéristique 0 (au sens de [14]). Dans le cadre de cet exposé, nous chercherons seulement à expliciter les idées qui permettent de définir une telle théorie ; les démonstrations seront publiées ailleurs [3 a]. Nous renvoyons d'autre part à [3] pour un exemple des liens étroits qui existent entre cette théorie et les travaux de Dwork, Sperber [29 ; 30], Adolphson-Sperber [1], Robba [28],... . Indiquons simplement ici le principe qui semble se dégager : les espaces de "cohomologie analytique" étudiés dans ces articles (munis de leur Frobenius et éventuellement du système différentiel qui contrôle la variation de ces espaces) s'interprètent comme certains faisceaux de cohomologie rigide associés à une famille de variétés en caractéristique p, faisceaux qui possèdent dans les cas considérés une structure naturelle de "F-cristal surconvergent" (cf. § 4) ; d'autre part, la "théorie duale" est l'étude de la cohomologie rigide à support propre dans la même situation.

Ce travail est le prolongement d'une réflexion menée avec Ogus sur la cohomologie cristalline "à isogénie près" [5], et c'est un plaisir de le remercier pour les nombreuses et stimulantes discussions que nous avons eues. En particulier, la notion de "cristal convergent" explicitée en 4.1 a été dégagée au cours d'un travail commun, et correspond à celle qu'étudie Ogus dans le cadre de la géométrie formelle dans [26].

On désignera par K un corps de caractéristique 0, complet pour une valeur absolue non archimédienne ; on notera $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel, supposé de caractéristique $p > 0$, et $\Gamma^* := |K^*| \otimes \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^*$, où $|K^*|$ est le groupe multiplicatif des valeurs absolues des éléments non nuls de K. Enfin, pour tout anneau topologique A, $A\{t_1,\ldots,t_n\}$ désignera l'anneau des séries formelles restreintes (i.e. dont les coefficients tendent vers 0) à coefficients dans A.

1. Tubes et cohomologie naïve.

Le lien entre les schémas sur k et les espaces analytiques rigides sur K s'établit par l'intermédiaire des schémas formels sur $\mathcal{V}$, grâce à la construction de la fibre générique d'un schéma formel, due à Raynaud [27].

(1.1) Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre séparée et complète pour la topologie p-adique. Rappelons que le $\mathcal{V}$-schéma formel affine $P := \mathrm{Spf}(A)$ a pour espace topologique sous jacent celui de $P_n := \mathrm{Spec}(A/p^nA)$ (qui est aussi celui de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$), et pour faisceau d'algèbres le faisceau $\mathcal{O}_P := \varprojlim_n \mathcal{O}_{P_n}$. Un $\mathcal{V}$-<u>schéma formel</u> est un espace topologique P muni d'un faisceau de $\mathcal{V}$-algèbres $\mathcal{O}_P$, possédant un recouvrement ouvert (P_i) tel que $(P_i, \mathcal{O}_P|_{P_i})$ soit un $\mathcal{V}$-schéma formel affine ; les morphismes de $\mathcal{V}$-schémas formels sont définis de manière évidente. Nous dirons que P est de <u>type fini</u> si P possède un recouvrement fini par des ouverts affines de la forme $\mathrm{Spf}(A_i)$, où A_i est quotient d'une algèbre $\mathcal{V}\{t_1, \dots, t_n\}$, et que P est <u>séparé</u> si le morphisme diagonal est une immersion fermée ; tous les schémas et schémas formels considérés ici seront supposés séparés et de type fini. Si $u : P' \longrightarrow P$ est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels, on dira que u est lisse si sa réduction modulo p^n est un morphisme lisse pour tout n.

A tout $\mathcal{V}$-schéma formel P, on associe un espace analytique rigide $\tilde{P}$ sur K de la façon suivante.

(i) Si $P = \mathrm{Spf}(A)$, où A est quotient de $\mathcal{V}\{t_1, \dots, t_n\}$, alors $A \otimes K$ est une algèbre de Tate, et on définit $\tilde{P}$ par $\tilde{P} := \mathrm{Sp}(A \otimes K)$. On observe que, si $x \in \mathrm{Sp}(A \otimes K)$ correspond à un idéal maximal $\mathfrak{a} \subset A \otimes K$, l'image R de A dans $K(x) := (A \otimes K)/\mathfrak{a}$ est une $\mathcal{V}$-algèbre finie, plate et intègre. Réciproquement, la donnée d'un tel quotient R de A détermine par tensorisation avec K un idéal maximal de $A \otimes K$.

(ii) On tire de cette remarque la description des points de $\tilde{P}$ dans le cas général : par définition, les points de $\tilde{P}$ sont les sous-schémas formels fermés de P, intègres, finis et plats sur $\mathcal{V}$. L'algèbre R d'un tel sous-schéma Z est une $\mathcal{V}$-algèbre locale, telle que $R/\mathfrak{m}R$ soit artinienne. En particulier, le support de Z est réduit à un point $z \in P$, qu'on appellera <u>spécialisation</u> du point $x \in \tilde{P}$ correspondant à Z.

(iii) Soit $sp : \tilde{P} \longrightarrow P$ l'application qui à $x \in \tilde{P}$ associe sa spécialisation. Si $U \subset P$ est un ouvert affine, $sp^{-1}(U)$ est en bijection avec $\tilde{U}$, et est donc muni d'une structure d'espace analytique rigide. On vérifie que, pour U variable, ces structures se recollent, ce qui munit $\tilde{P}$ d'une structure d'espace analytique rigide, fonctorielle en P. On dira que $\tilde{P}$ est la <u>fibre générique</u> de P ; l'application $sp : \tilde{P} \longrightarrow P$ s'étend de façon évidente en un morphisme d'espaces annelés, qu'on appellera <u>morphisme de spécialisation</u>.

<u>Exemples</u>. On suppose K algébriquement clos.

a) $P = \hat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}$, l'espace affine formel sur $\mathcal{V}$. Alors $P = \mathrm{Spf}(\mathcal{V}\{t_1,\dots,t_n\})$, et $\tilde{P} = \mathrm{Sp}(K\{t_1,\dots,t_n\})$ est la boule unité fermée de $\mathbb{A}^{n\,an}$. Un point x de $\tilde{P}$ est défini par $(\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathcal{V}^n$, et sp(x) est le point $(\bar{\xi}_1,\dots,\bar{\xi}_n)$ de l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ sur k, les $\bar{\xi}_i$ étant les classes résiduelles des ξ_i.

b) $P = \hat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$, l'espace projectif formel sur $\mathcal{V}$. Alors $\tilde{P}$ est l'espace projectif analytique sur K. Un point $x \in \tilde{P}$ peut être représenté par des coordonnées homogènes $(\xi_o,\dots,\xi_n)$, où $\xi_i \in \mathcal{V}$, et l'un des ξ_i n'est pas dans $\mathfrak{m}$, et sp(x) est le point de coordonnées homogènes $(\bar{\xi}_o,\dots,\bar{\xi}_n)$ de $\mathbb{P}^n_k$.

(1.2) Supposons la valuation de K discrète, et k parfait ; soit W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. Soient X un k-schéma lisse (non nécessairement propre), et $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse relevant X ; on note $H^*_{cris}(X/W)$ la cohomologie cristalline de X, et $H^*_{DR}(\mathfrak{X}/\mathcal{V})$ la cohomologie du complexe $\Omega^{\cdot}_{\mathfrak{X}/\mathcal{V}}$ des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ relativement à $\mathcal{V}$ (cohomologie de De Rham de $\mathfrak{X}/\mathcal{V}$). Si l'indice de ramification absolu e de $\mathcal{V}$ satisfait $e \leq p-1$, il existe un isomorphisme canonique [2] :

$$H^*_{cris}(X/W) \otimes_W \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(\mathfrak{X}/\mathcal{V}) .$$

Si e est quelconque, un tel isomorphisme existe encore après tensorisation par K [5] :

$$H^*_{cris}(X/W) \otimes_W K \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(\mathfrak{X}/\mathcal{V}) \otimes_{\mathcal{V}} K .$$

Comme la cohomologie des faisceaux Ω^i peut se calculer par la cohomologie de Čech en géométrie formelle comme en géométrie analytique, $H^*_{DR}(\mathfrak{X}/\mathcal{V})\otimes_{\mathcal{V}} K$ s'identifie à $H^*_{DR}(\tilde{\mathfrak{X}}/K) := H^*(\tilde{\mathfrak{X}},\Omega^{\cdot}_{\tilde{\mathfrak{X}}/K})$. On en déduit un isomorphisme canonique

$$H^*_{cris}(X/\mathcal{V})\otimes_{\mathcal{V}} K \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(\tilde{\mathfrak{X}}/K) ,$$

qui fournit une interprétation analytique de la cohomologie cristalline de X lorsque X est relevable sur $\mathcal{V}$.

En général, X n'est pas relevable, mais l'on peut souvent remplacer $\mathfrak{X}$ par un plongement $X \hookrightarrow P$, où P est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X, et la considération d'un voisinage, en un sens convenable, de X dans P (par exemple, si X est quasi-projectif, on pourra prendre pour P un espace projectif sur $\mathcal{V}$) ; c'est aussi la méthode à utiliser lorsque X est une variété singulière. Il y a alors lieu de vérifier que la cohomologie de De Rham de ce voisinage ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du plongement choisi, ce qu'on déduit d'un résultat du type "lemme de Poincaré".

Notre point de départ va consister à remplacer les voisinages à puissances divisées utilisés en cohomologie cristalline par des voisinages analytiques. On revient aux hypothèses initiales sur K.

(1.3) <u>Définition</u>. *Soit* $X \hookrightarrow P$ *une* $\mathcal{V}$*-immersion d'un* k*-schéma* X *dans un* $\mathcal{V}$*-schéma formel* P. *Le tube de* X *dans* P *est l'ouvert admissible* $]X[_P$ *de* $\tilde{P}$ *défini par*

$$]X[_P = sp^{-1}(X) .$$

Supposons P affine, et X fermé dans P ; l'idéal de X dans P est donc engendré par $\mathfrak{m}$ et par des sections $f_1,\dots,f_r \in \Gamma(P,\mathcal{O}_P)$. On vérifie alors facilement

$$]X[_P = \{x \in \tilde{P} \mid \forall i \ , \ |f_i(x)| < 1\} ,$$

les f_i étant considérées comme des fonctions holomorphes sur $\tilde{P}$ de manière évidente.

Il en résulte, sans hypothèse sur P, que $]X[_P$ est bien un ouvert admissible de $\tilde{P}$, et, lorsque P est affine, que $]X[_P$ est quasi-Stein au sens de Kiehl [21].

Pour $\lambda \in \Gamma^*$, $\lambda < 1$, on posera

$$]X[_{P,\lambda} = \{x \in \tilde{P} \mid \forall i \ , \ |f_i(x)| < \lambda\}.$$

Si la valuation est discrète, et si $|a| < \lambda$ pour tout $a \in \mathfrak{m}$, $]X[_{P,\lambda}$ ne change pas si on remplace les f_i par un autre système d'équations de X dans P, ce qui permet d'étendre la définition de $]X[_{P,\lambda}$ au cas où P n'est pas affine ; lorsque la valuation n'est pas discrète, deux choix différents pour les équations de X dans P donnent des ouverts qui coïncident pour λ assez près de 1, si bien que le système inductif des $]X[_{P,\lambda}$, pour $\lambda \longrightarrow 1$, garde un sens, et peut être défini même si P n'est pas affine ; on dira que $]X[_{P,\lambda}$ est le <u>tube ouvert de rayon</u> λ <u>de</u> X <u>dans</u> P.

(1.4) L'importance des tubes du point de vue cohomologique provient de la propriété topologique suivante :

<u>Lemme</u> 1 : *Soient* X *un* k-*schéma,* $i : X \hookrightarrow P$, $i' : X \hookrightarrow P'$ *deux immersions de* X *dans des* $\mathcal{V}$-*schémas formels,* $u : P' \longrightarrow P$ *un morphisme lisse au voisinage de* X, *tel que* $u \circ i' = i$. *Alors le morphisme* $\tilde{u} : \tilde{P}' \longrightarrow \tilde{P}$ *défini par* u *induit une fibration en polydisques unité ouverts de* $]X[_{P'}$ *sur* $]X[_P$ *: il existe un recouvrement affine* (P_i) *de* P, *et des isomorphismes commutant aux projections*

$$\begin{tikzcd}
]X[_{P'} \cap \tilde{u}^{-1}(\tilde{P}_i) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\tilde{u}"'] & & (]X[_P \cap \tilde{P}_i) \times D(0,1^-)^n \arrow[dl] \\
&]X[_P \cap \tilde{P}_i &
\end{tikzcd}$$

L'existence de primitives globales sur un disque ouvert et le théorème B [21] permettent d'en déduire :

<u>Proposition</u> 1 : *Sous les hypothèses du lemme* 1, *l'homomorphisme canonique*

$$\Omega^{\cdot}_{]X[_P} \longrightarrow \tilde{u}_* \, \Omega^{\cdot}_{]X[_{P'}}$$

induit un isomorphisme entre les faisceaux de cohomologie des deux complexes, et les $R^q \tilde{u}_* \, \Omega^i_{]X[_{P'}}$ *sont nuls pour* $q \geq 1$.

(1.5) La proposition précédente entraîne que l'homomorphisme

$$H^*(]X[_P , \Omega^{\cdot}_{]X[_P}) \longrightarrow H^*(]X[_{P'} , \Omega^{\cdot}_{]X[_{P'}})$$

induit par $\tilde{u}$ est un isomorphisme. Supposons alors qu'il existe un plongement $X \hookrightarrow P$ de X dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X. La méthode classique dite "du plongement diagonal" permet d'en déduire que $H^*(]X[_P , \Omega^{\cdot}_{]X[_P})$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix du plongement, et est un foncteur contravariant en X ; on définit alors la <u>cohomologie naïve</u> de X/K par

$$H^*_{\text{naïf}}(X/K) := H^*(]X[_P , \Omega^{\cdot}_{]X[_P}) .$$

De tels plongements $X \hookrightarrow P$ existent toujours localement, mais pas nécessairement globalement sur X ; la définition peut s'étendre au cas général, par exemple en choisissant un recouvrement ouvert (X_i) de X, et des plongements $X_i \hookrightarrow P_i$, et en procédant par une méthode du type "cohomologie de Čech" (cf. [14] pour une situation du même type).

En utilisant le plongement $X \hookrightarrow P$ pour calculer la cohomologie cristalline, on montre sans difficulté :

<u>Proposition</u> 2 : *Supposons que* $\mathcal{V}$ *soit un anneau de valuation discrète, et que* k *soit parfait. Alors il existe un homomorphisme canonique*

$$H^*_{\text{naïf}}(X/K) \longrightarrow H^*_{\text{cris}}(X/\mathcal{V}) \otimes_{\mathcal{V}} K ,$$

et c'est un isomorphisme si X *est lisse sur* k.

Remarque : Lorsque X est propre et lisse, la cohomologie naïve conserve donc les bonnes propriétés de la cohomologie cristalline ; comme nous le verrons plus loin, il semble raisonnable de s'attendre à ce que ce soit encore une bonne cohomologie lorsque X est propre, mais éventuellement singulier. Par contre, la proposition 2 montre que ce n'est pas le cas si X n'est pas propre : par exemple, la cohomologie naïve de l'espace affine $\mathbb{A}^n$ sur k est la cohomologie de De Rham du polydisque fermé $D(0,1^+)^n$, qui n'est pas de dimension finie sur K.

2. Surconvergence et cohomologie rigide.

Pour obtenir une définition raisonnable de la cohomologie dans le cas non propre, il faut introduire des conditions de surconvergence. Rappelons d'abord l'interprétation analytique de la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

(2.1) Soient A_0 une k-algèbre lisse, $X = \mathrm{Spec}(A_0)$. On peut alors trouver une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A telle que $A/\mathfrak{m}A \simeq A_0$ [11]. Choisissons une présentation $A \simeq \mathcal{V}[t_1,\dots,t_n]/I$, ce qui fixe un plongement de $\mathfrak{X} := \mathrm{Spec}(A)$ dans l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$. On note $\mathfrak{X}_K$, $\mathbb{A}^n_K$ les fibres génériques de $\mathfrak{X}$ et $\mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$, et $\mathfrak{X}_K^{an}$, $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$ les espaces analytiques rigides associés [12 ; 13]. Soit d'autre part $\hat{\mathfrak{X}} := \mathrm{Spf}(\hat{A})$ le complété formel p-adique de $\mathfrak{X}$; sa fibre générique $U := \hat{\mathfrak{X}}^{\sim}$ s'identifie à l'intersection de $\mathfrak{X}_K^{an}$ avec la boule unité de $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$, et la cohomologie naïve de X est la cohomologie de De Rham de l'algèbre $\hat{A}\otimes K$ des fonctions holomorphes sur U. Soit enfin $A^{\dagger}$ le complété faible de A pour la topologie p-adique ; la cohomologie de Monsky-Washnitzer de X est la cohomologie de De Rham de $A^{\dagger}\otimes K$. Du point de vue analytique, on peut décrire $A^{\dagger}\otimes K$ en introduisant, pour $\lambda < 1$, l'intersection U_λ de $\mathfrak{X}_K^{an}$ et de la boule fermée de centre 0 et de rayon $1/\lambda$; on obtient alors