BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDERAOUF MOURTADA

ROBERT MOUSSU

Applications de Dulac et applications pfaffiennes

Bulletin de la S. M. F., tome 125, n° 1 (1997), p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_1_1_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DE DULAC ET APPLICATIONS PFAFFIENNES

PAR

ABDERAOUF MOURTADA et ROBERT MOUSSU (*)

RÉSUMÉ. — On démontre que l'application de Dulac d'une 1-forme analytique réduite est 1-pfaffienne si et seulement si la 1-forme est analytiquement normalisable. Dans le problème de Dulac, on est amené à étudier les points fixes d'une composition d'applications de Dulac. La solution complète de ce problème proposée par Écalte et Il'Yashenko repose sur des techniques sophistiquées de resommation et de résurgence. Dans le cas où ces applications de Dulac sont 1-pfaffiennes, le problème admet une preuve géométrique basée sur la théorie de Khovanskii. Le théorème démontré dans cet article précise les limites du champ d'application de cette théorie et donne une nouvelle caractérisation géométrique des 1-formes analytiques ayant un facteur intégrant analytique.

ABSTRACT. — It's shown that the Dulac map of an analytic and reduced 1-form is 1-pfaffian if and only if the 1-form is analytically normalizable. In the Dulac's problem, one is lead to the investigation of the fixed points of the composition of Dulac maps. The general solution of this problem (Écalte, Il'Yashenko) uses sophisticated technics of resummation and resurgence. In the case of 1-pfaffian Dulac maps, this problem has a geometric proof based on Khovanskii's theory. Our theorem makes precise the limits for applying this theory and gives a new geometric characterization of normalizable analytic 1-forms.

0. Introduction

Soit ω une 1-forme analytique réelle sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que l'équation différentielle $\omega = 0$ possède un secteur S de type col en 0. Le bord de S est la réunion de deux courbes intégrales c_1, c_2 et du point 0. Soient, pour $i = 1, 2$, τ_i une courbe analytique lisse qui coupe transversalement c_i en un point p_i assez voisin de 0. La courbe

(*) Texte reçu le 9 octobre 1995, accepté le 11 octobre 1996.

A. MOURTADA et R. MOUSSU, Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, CNRS UMR 5584, U.F.R. Sciences et Techniques, 9, avenue Alain Savary, B.P. 400, 21011 Dijon CEDEX (France). Email : mourtada@u-bourgogne.fr.

Classification AMS : 32C05, 32C25, 58A99, 34C35, 58F14, 58F21, 34C05.

intégrale de $\omega = 0$ passant par un point q_1 de $\tau_1 \cap S$ assez proche de p_1 coupe $\tau_2 \cap S$, une première fois, en un point q_2 proche de p_2 . Le germe en p_1 de

$$d = d_{\omega, S} : q_1 \longrightarrow q_2$$

est l'application de Dulac de $\omega = 0$ évaluée sur τ_1, τ_2 .

On dit qu'un germe d'homéomorphisme d de $(\mathbb{R}^+, 0)$ est 1-pfaffien si son graphe dans $(\mathbb{R}^2, 0)$ est le germe en 0 d'une courbe intégrale d'une équation différentielle analytique $\eta = 0$, à singularité algébriquement isolée en $0 \in \mathbb{R}^2$. Il est facile de montrer [11] que $d_{\omega, S}$ est 1-pfaffien si $\omega = 0$ possède un *facteur intégrant analytique* I , i.e. I est un germe en 0 de fonction analytique telle ω/I soit fermée. Le but principal de ce travail est de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Soit $\omega = 0$ un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ d'équation différentielle analytique réduite qui possède un secteur col S . Alors ω possède un facteur intégrant analytique si et seulement si $d_{\omega, S}$ est 1-pfaffien.*

Rappelons que $\omega = 0$ est réduite si son 1-jet en 0 peut s'écrire

$$j^1\omega = \lambda y dx + x dy \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ce type d'équations joue un rôle fondamental dans la preuve du théorème de Dulac [3], [5], dans l'étude de la cyclicité d'un polycycle [10], [12] et plus généralement dans le 16-ième problème de Hilbert. On se ramène, *via* le théorème de réduction des singularités [13], à l'étude de la composition d'applications de Dulac d'équations réduites. Lorsque ces applications sont 1-pfaffiennes cette étude est géométrique et élémentaire. On n'a pas alors à utiliser la resommabilité, la résurgence mais la théorie de Khovanskii [6], [11]. Malheureusement, le théorème ci-dessus montre que le champ d'application de cette théorie aux problèmes de cycles limites est assez limité. Il doit être réservé à l'étude de « cas génériques » dans des problèmes de bifurcations.

Dans la section 1, nous précisons l'énoncé du théorème ci-dessus avec les propositions 1, 2 qui utilisent le langage des formes normales. Dans les sections 2 et 3 nous démontrons ces deux propositions.

Ce travail doit beaucoup à J. Écalle. Nous le remercions.

1. Applications de Dulac, holonomies et formes normales

Dans toute la suite,

$$\omega = a dx + b dy$$

désigne une 1-forme analytique sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$.

On suppose que l'équation $\omega = 0$ est réduite et qu'elle possède un secteur col. Alors $\omega = 0$ est une équation différentielle dans le *domaine de Siegel* : son 1-jet s'écrit

$$j^1\omega = \lambda y dx + x dy$$

où λ , son *nombre caractéristique*, est un réel ≥ 0 . Il existe un changement de coordonnées formel N appelé *mise sous forme normale* :

$$N(X, Y) = (x(X, Y), y(X, Y))$$

avec $x(X, Y)$ et $y(X, Y)$ dans $\mathbb{R}[[X, Y]]$, $DN(0) = 1_{\mathbb{R}^2}$ tel que l'équation

$$\Omega = N^*(\omega) = 0$$

soit *une forme normale*, c'est-à-dire d'un des trois types suivants.

1.1. Forme normale.

Nous reprenons les notations de J. Écalle [3].

Type I. — Cas hyperbolique quasi-résonnant :

$$\Omega_I = \lambda Y dX + X dY \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}.$$

Type II. — Cas hyperbolique résonnant :

$$\Omega_{II} = pY dX(1 + \rho X^p Y^q) + qX dY(1 + \rho' X^p Y^q)$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\rho, \rho' \in \mathbb{R}$.

Type III. — Cas semi-hyperbolique :

$$\Omega_{III} = pY dX(1 + \rho X^p) + X^{p+1} dY,$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\rho \in \mathbb{R}$.

Dans les trois cas, $\{X \geq 0, Y \geq 0\}$ est un secteur col de $\Omega_\bullet$. Son application de Dulac évaluée sur les courbes $Y = 1, X = 1$ est notée $D_\bullet : X \rightarrow Y$. On vérifie aisément que :

$$D_I(X) = X^\lambda, \quad D_{III}(X) = X^{\rho p} \exp(-1/X^p),$$

$$D_{II}(X) = X^{p/q} \left(1 + \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n > 0}} A_{m,n} (X^{1/q})^m (X^p \text{Log} X)^n \right),$$

où $\sum A_{m,n} S^m T^n$ converge sur voisinage du polydisque :

$$|S| \leq 1, \quad |T| \leq 1 \quad \text{et où} \quad A_{0,1} = \rho - \rho'.$$

Dans les trois cas, nous écrivons encore $\Omega_{\bullet} = 0$ l'équation dans $\mathbb{C}^2$ complexifiée de $\Omega_{\bullet}$ et nous notons :

$$X \longrightarrow U(X), \quad (\text{resp. } Y \longrightarrow V(Y))$$

le difféomorphisme d'holonomie de $X = 0$ évalué sur $Y = 1$ dans les trois cas (resp. de $Y = 0$ évalué sur $X = 1$ dans les cas I et II).

1.2. Holonomie et itérateurs pour $\omega = 0$.

Lorsque $\omega = 0$ possède une forme normale du type $\Omega_{\bullet}$ nous dirons encore que $\omega = 0$ est du type « $\bullet$ ».

— Si $\lambda \neq 0$, $\omega = 0$ est du type I ou II; elle possède deux courbes intégrables analytiques lisses transverses qui passent par 0. On choisit les coordonnées (x, y) de telle façon que ce soient les courbes $x = 0$, $y = 0$.

— Si $\lambda = 0$, $\omega = 0$ est du type III; elle possède une courbe analytique lisse passant par 0 tangente à $x = 0$ et une «courbe intégrale formelle» tangente à $y = 0$. On choisit les coordonnées (x, y) telle que la première soit $x = 0$.

Nous dirons que $\omega = 0$ est *préparée à l'ordre n* si les coordonnées (x, y) possèdent ces propriétés et si la mise sous forme normale N est tangente à $1_{\mathbb{R}^2}$ à l'ordre n . Dans les trois cas, nous écrivons encore $\omega = 0$ la complexifiée de $\omega = 0$. Nous supposons qu'elle converge sur un voisinage du polydisque $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ et nous notons :

$$x \longmapsto u(x), \quad (\text{resp. } y \longmapsto v(y))$$

le difféomorphisme d'holonomie de $x = 0$ évalué sur $y = 1$ (resp. de $y = 0$ évalué sur $x = 1$ dans les cas I, II).

Il existe une unique série formelle $\widehat{H} \in \mathbb{R}[[x]]$ (resp. $\widehat{K} \in \mathbb{R}[[y]]$) appelée *itérateur de u* (resp. *de v pour I, II*) telle que :

$$u = \widehat{H}^{-1} \circ U \circ \widehat{H} \quad (\text{resp. } v = \widehat{K}^{-1} \circ V \circ \widehat{K}),$$

$$\widehat{H}(0) = 0, \quad \widehat{H}'(0) = 1 \quad (\text{resp. } \widehat{K}(0) = 0, \quad \widehat{K}'(0) = 1)$$

et telle que les coefficients des x^{pr} (resp. y^{qr}) avec $r \in \mathbb{N}$ soient nuls dans le cas II. Les propriétés de ces itérateurs et de la mise sous forme normale sont intimement liées comme le montre la proposition classique suivante.