BULLETIN DE LA S. M. F.

CÉDRIC BONNAFÉ

Opérateur de torsion dans $SL_n(q)$ et $SU_n(q)$

Bulletin de la S. M. F., tome 128, nº 3 (2000), p. 309-345
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_3_309_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 309–345.

OPÉRATEUR DE TORSION DANS $\mathbf{SL}_n(q)$ ET $\mathbf{SU}_n(q)$

PAR CÉDRIC BONNAFÉ (*)

RÉSUMÉ. — Nous calculons l'opérateur de torsion dans tous les groupes réductifs finis de type A lorsque l'endomorphisme de Frobenius agit trivialement sur le le groupe des composantes du centre. Le résultat s'applique aussi bien au groupe $\mathrm{SL}_n(q)$ qu'à la forme tordue $\mathrm{SU}_n(q)$.

ABSTRACT. — TWISTING OPERATORS IN $\mathrm{SL}_n(q)$ AND $\mathrm{SU}_n(q)$. — We compute the twisting operator in every finite reductive group of type A, provided that the Frobenius endomorphism acts trivially on the group of components of the center. Our result applies as well in the group $\mathrm{SL}_n(q)$ as in the twisted form $\mathrm{SU}_n(q)$.

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif défini sur un corps à q éléments $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p et soit $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Dans le but de paramétrer les caractères (ordinaires) du groupe fini $\boldsymbol{G}^F$, G. Lusztig a introduit des combinaisons linéaires particulières (et explicites) des caractères irréductibles de $\boldsymbol{G}^F$, appelés depuis *caractères fantômes* (ou *almost characters* en anglais). Ces caractères fantômes forment une base orthonormale de l'espace $\mathrm{Cent}(\boldsymbol{G}^F)$ des fonctions centrales sur $\boldsymbol{G}^F$ et calculer la table de caractères de $\boldsymbol{G}^F$ se ramène au calcul des valeurs des caractères fantômes en les éléments de $\boldsymbol{G}^F$. Les calculs sur des petits exemples montrent que la table des caractères fantômes a une structure beaucoup plus simple que la table des caractères ordinaires. Dans une série d'articles (*cf.* [L2] et [L3]), Lusztig a élaboré la théorie des *faisceaux-caractères* pour essayer de comprendre ce phénomène. Une des réalisations de cette théorie est la construction d'une nouvelle base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathrm{Cent}(\boldsymbol{G}^F)$, dont les éléments, appelés *fonctions*

(*) Texte reçu le 19 janvier 1999, accepté le 25 mai 1999.
C. BONNAFÉ, Département de Mathématiques, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25000 Besançon. Cet article a été écrit alors que l'auteur était instructeur à l'Université de Chicago (Illinois, USA). Email : bonnafe@math.univ-fcomte.fr.

Classification mathématique par matières : 20 G 05, 20 G 04.

Mots clés : groupes réductifs, corps finis, caractères.

caractéristiques de faisceaux-caractères, sont paramétrés par le même ensemble que celui qui paramètre les caractères fantômes. Lusztig a conjecturé que ces deux bases coïncident, à multiplication près par certaines racines de l'unité, et a donné un algorithme permettant de calculer les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères.

La preuve de cette conjecture en général constituerait une étape importante dans la connaissance de la table de caractères de $\boldsymbol{G}^F$. Un progrès considérable a été fait par T. Shoji qui a prouvé cette conjecture lorsque le centre de $\boldsymbol{G}$ est connexe en supposant seulement que p est presque bon (*cf.* [Sh2]) : il a même calculé explicitement les racines de l'unité invoquées ci-dessus.

Une des conséquences de la conjecture de Lusztig est que les caractères fantômes sont des vecteurs propres pour l'opérateur de torsion $\mathrm{Sh}_{F/F}^{\boldsymbol{G}}$ (*cf.* § 2.1 pour la définition de l'opérateur de torsion $\mathrm{Sh}_{F/F}^{\boldsymbol{G}} : \mathrm{Cent}(\boldsymbol{G}^F) \to \mathrm{Cent}(\boldsymbol{G}^F)$). Dans [A], T. Asai a étudié l'opérateur de torsion lorsque $\boldsymbol{G}$ est un sous-groupe de Levi rationnel d'un sous-groupe parabolique non nécessairement rationnel du groupe spécial linéaire SL_n muni de son endomorphisme de Frobenius déployé naturel. Cependant, le résultat obtenu [A, th. 4.5.2], à savoir le calcul explicite de l'opérateur de torsion, ne s'appliquait que lorsque $q \equiv 1 \bmod (\mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n))$ et malheureusement, la preuve d'Asai était fausse. Dans cet article, nous reprenons quelques idées d'Asai et donnons une preuve (que l'on espère correcte) de ce résultat dans le cas où $q \equiv 1 \bmod n$. Mieux, nous généralisons ce résultat au cas de tous les groupes de type A (c'est-à-dire si toutes les composantes irréductibles du système de racines de $\boldsymbol{G}$ sont de type A). Il est à noter que la définition de groupe de type A ci-dessus ne fait pas intervenir la structure rationnelle de $\boldsymbol{G}$. En particulier, le résultat que l'on obtient s'applique aussi bien au groupe spécial linéaire qu'au groupe spécial unitaire.

Plus précisément, si $\boldsymbol{G}$ est de type A, nous montrons essentiellement deux résultats sur l'opérateur de torsion. Le premier est que l'opérateur de torsion stabilise l'espace engendré par les caractères irréductibles de $\boldsymbol{G}^F$ appartenant à une même série de Lusztig géométrique, ceci sans aucune hypothèse sur q (*cf.* corollaire 4.3.5). Le deuxième est le calcul explicite de l'opérateur de torsion lorsque F agit trivialement sur le groupe des composantes du centre de $\boldsymbol{G}$ (si $\boldsymbol{G}^F = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, cette hypothèse est équivalente à $q \equiv 1 \bmod n$) : nous prouvons qu'alors les caractères fantômes sont des vecteurs propres pour $\mathrm{Sh}_{F/F}^{\boldsymbol{G}}$ et nous calculons explicitement les valeurs propres associées (*cf.* théorème 5.5.4). Nous utilisons pour cela deux ingrédients essentiels. Le premier est la notion de fonction absolument cuspidale (*cf.* § 4.2 pour la définition) : l'espace des fonctions absolument cuspidales a été déterminé dans les groupes de type A dans [B2, cor. 6.2.2] et, à partir de ce résultat, il est possible de déduire que l'opérateur de torsion stabilise l'espace engendré par les caractères irréductibles de $\boldsymbol{G}^F$ appartenant à une même série de Lusztig géométrique. Le deuxième est la notion de caractère de Gel'fand-Graev généralisé. Ces caractères permettent, dans les groupes de type A, de paramétrer les caractères irréductibles de $\boldsymbol{G}^F$. De plus, il est facile de calculer leur image par l'opérateur de torsion (*cf.* prop. 2.2.5). Une récurrence portant sur les classes unipotentes de $\boldsymbol{G}$ permet alors de conclure. Cet argument n'est pas nouveau. Il est à l'œuvre dans l'article de Shoji [Sh3] dans lequel est calculée la descente de Shintani $\mathrm{Sh}^{\boldsymbol{G}}_{F^m/F}$ dans le groupe spécial linéaire lorsque m est suffisamment divisible. Ici, nous nous intéressons au cas extrême opposé, c'est-à-dire $m = 1$, et reprenons quelques idées de Shoji. Le cas $m = 1$ étant plutôt plus facile, nous parvenons à mener l'argument jusqu'au bout, même dans le cas du groupe spécial unitaire.

Nous concluons cet article en montrant que, toujours sous l'hypothèse que $\boldsymbol{G}$ est de type A, les fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères cuspidaux sont égales, à une racine de l'unité près, aux caractères fantômes absolument cuspidaux correspondants : c'est une première étape dans le but de prouver la conjecture de Lusztig pour ce type de groupes.

Cet article est organisé comme suit. Dans les trois premières parties, aucune hypothèse n'est faite sur le groupe $\boldsymbol{G}$. Dans la première, nous nous intéressons au groupe des composantes du centre de $\boldsymbol{G}$. Il n'est (presque) pas exagéré de dire que, dans le cas des groupes de type A, toutes les difficultés ont une interprétation en termes de ce groupe abélien fini. Dans la deuxième, nous rappelons la définition de l'opérateur de torsion $\mathrm{Sh}^{\boldsymbol{G}}_{F/F}$ et calculons son action sur des caractères obtenus par induction à partir du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique rationnel de $\boldsymbol{G}$. Dans la troisième, nous rappelons quelques propriétés des caractères de Gel'fand-Graev ordinaires, qui sont des cas particuliers de caractères mentionnés ci-dessus. Dans les trois dernières parties, nous nous intéressons aux groupes de type A. Le but de la quatrième partie est de montrer que l'opérateur de torsion stabilise l'espace vectoriel engendré par les caractères irréductibles de $\boldsymbol{G}^F$ appartenant à une série de Lusztig géométrique (*cf.* corollaire 4.3.5). La cinquième partie est consacrée à l'énoncé et à la preuve du théorème principal de cette article (*cf.* théorème 5.5.4), à savoir la description de l'opérateur de torsion. Dans la dernière partie, nous nous intéressons aux faisceaux-caractères cuspidaux F-stables sur le groupe $\boldsymbol{G}$.

Ce n'est qu'au cours de la preuve du théorème 5.5.4 que nous avons besoin de supposer que F agit trivialement sur le groupe des composantes du centre de $\boldsymbol{G}$. Tous les autres résultats de cet article sont affranchis de cette hypothèse.

REMERCIEMENTS. — L'auteur tient à remercier particulièrement Jean Michel pour avoir été à l'origine de ce travail, pour en avoir suivi attentivement l'évolution, et pour avoir lu scrupuleusement une première version de cet article.

Notations

0.1. — Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{F}$ une clôture algébrique du corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p$. On fixe une puissance q de p et on notera $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\mathbb{F}$ à q éléments. Toutes les variétés et tous les groupes algébriques seront considérés sur $\mathbb{F}$.

On se fixe d'autre part un nombre premier ℓ différent de p et on notera $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps ℓ-adique $\mathbb{Q}_\ell$. On choisit un automorphisme de corps $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $x \mapsto \overline{x}$ tel que $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$ pour toute racine de l'unité ζ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

0.2. — Si H est un groupe fini, on notera $\operatorname{Irr} H$ l'ensemble des caractères irréductibles de H (sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) et $\operatorname{Cent}(H)$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel des fonctions centrales $H \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Soit $H^\wedge$ le groupe abélien des caractères linéaires $H \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ (si H est abélien, on a $H^\wedge = \operatorname{Irr} H$). On appellera H-module un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell H$-module à gauche de dimension finie. Si K est un autre groupe fini, on appellera H-module-K un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une structure de bimodule, H agissant à gauche et K à droite. Si $\varphi : H \to K$ est un morphisme de groupes, on notera $\widehat{\varphi} : K^\wedge \to H^\wedge$ le morphisme de groupes abéliens induit par φ. Si η et η' sont deux fonctions centrales sur H, on notera

$$\langle \eta, \eta' \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \eta(h)\, \overline{\eta'(h)}.$$

Alors $\langle\, ,\rangle_H$ est un produit scalaire sur $\operatorname{Cent}(H)$ pour lequel $\operatorname{Irr} H$ est une base orthonormale. L'ensemble des classes de conjugaison de H sera noté $\operatorname{Conj}(H)$. Si $g \in H$, on notera $[g]$ ou $[g]_H$ sa classe de conjugaison dans H.

Si H est de plus abélien et si $\varphi : H \to H$ est un automorphisme du groupe H, on posera :

$$\mathcal{M}(H,\varphi) = H^1(\varphi, H) \times (H^\varphi)^\wedge,$$
$$\mathcal{M}^\vee(H,\varphi) = H^\varphi \times H^1(\varphi, H)^\wedge,$$

où $H^1(\varphi, H) = H/\{\varphi(h)h^{-1} \mid h \in H\}$ est le premier groupe de cohomologie du groupe cyclique $\langle\varphi\rangle$ à coefficients dans H. Si $(\alpha,\xi) \in \mathcal{M}(H,\varphi)$ et $(a,\zeta) \in \mathcal{M}^\vee(H,\varphi)$, on pose :

$$\big\{(\alpha,\xi),(a,\zeta)\big\} = \frac{\zeta(\alpha)\,\xi(a)}{|H^\varphi|}.$$

Remarquons que $|H^\varphi| = |H^1(\varphi, H)|$.

0.3. — Si $\boldsymbol{H}$ est un groupe algébrique, on notera $\boldsymbol{H}^0$ sa composante neutre. Si $h \in \boldsymbol{H}$, on notera (h) ou $(h)_{\boldsymbol{H}}$ la classe de conjugaison de h sous $\boldsymbol{H}$ et $C^0_{\boldsymbol{H}}(h)$ la composante neutre de son centralisateur dans $\boldsymbol{H}$. On posera