PANORAMAS ET SYNTHÈSES 17

UNE INTRODUCTION AUX MOTIFS
(MOTIFS PURS, MOTIFS MIXTES, PÉRIODES)

Yves André

Société Mathématique de France 2004
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique et du Ministère de la Culture et de la Communication

Y. André
D.M.A., École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris cedex 05.
E-mail : `andre@dma.ens.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 14F42, 19E15, 32G20, 11J91.

***Mots clefs.* —** Cycle algébrique, motif pur, motif mixte, théories cohomologiques, groupe de Galois motivique, cohomologie motivique, période.

Du même auteur :

G-functions and geometry, Aspects of Mathematics, vol. E13, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

(avec F. Baldassarri) *De Rham cohomology of differential modules on algebraic varieties*, Progress in Mathematics, vol. 189, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

Period mappings and differential equations. From $\mathbb{C}$ *to* $\mathbb{C}_p$, Tôhoku-Hokkaidô lectures in arithmetic geometry, MSJ Memoirs, vol. 12, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2003.

UNE INTRODUCTION AUX MOTIFS
(MOTIFS PURS, MOTIFS MIXTES, PÉRIODES)

Yves André

Résumé. — La théorie des *motifs*, introduite par A. Grothendieck il y a 40 ans et demeurée longtemps conjecturale, a connu depuis une quinzaine d'années des développements spectaculaires. Ce texte a pour objectif de rendre ces avancées accessibles au non-spécialiste, tout en donnant, au cours de ses deux premières parties, une vision unitaire des fondements géométriques de la théorie (pure et mixte). La troisième partie, consacrée aux *périodes* des motifs, en propose une illustration concrète ; on y traite en détail les exemples des valeurs de la fonction gamma aux points rationnels, et des nombres polyzêta.

Abstract **(An Introduction to Motives (Pure motives, mixed motives, periods))**

Motives have been introduced 40 years ago by A. Grothendieck as "a systematic theory of arithmetic properties of algebraic varieties as embodied in their groups of classes of cycles". This text provides an exposition of the geometric foundations of the theory (pure and mixed), and a panorama of major developments which have occurred in the last 15 years. The last part is devoted to a study of *periods* of motives, with emphasis on examples (polyzeta numbers, notably).

TABLE DES MATIÈRES

Partie II. Motifs mixtes

AVANT-PROPOS

Beaucoup de disciplines ont adopté dans leur vocabulaire technique le terme de *motif*, avec l'un ou l'autre de ses sens courants : celui de « raison » (à connotation subjective) et celui d'« élément constitutif ».

En introduisant ce terme en Géométrique Algébrique il y a 40 ans, A. Grothendieck jouait de ses deux sens à la fois. Il s'agissait de dégager le *motif* commun à divers phénomènes cohomologiques (par exemple les notions, transcendante ou arithmétique, de poids), ou encore le *motif* expliquant certaines relations mystérieuses entre intégrales de fonctions algébriques à une ou plusieurs variables, *etc.* Il s'agissait par ailleurs de décomposer, du point de vue cohomologique, les variétés algébriques en *motifs* simples susceptibles d'être recombinés.

L'intuition fondamentale de Grothendieck était que cette chimie des motifs était réglée par la théorie des correspondances algébriques. Les motifs devaient former une sorte de cohomologie universelle purement algébrique dont toutes les autres cohomologies se déduiraient, comme autant de « réalisations » différentes, et devaient donner lieu à une sorte de généralisation de la théorie de Galois aux systèmes de polynômes à plusieurs variables.

On peut distinguer trois périodes dans l'évolution de la théorie. Jusqu'à la fin des années 70, elle se réduisait essentiellement au corpus grothendieckien conjectural des motifs purs, tel qu'il est exposé à la fin du livre de Saavedra [**Saa72**]. On ne référait guère à ce morceau de « science-fiction mathématique » que comme source d'inspiration.

Les années 80 ont connu des progrès de deux ordres. D'une part, l'obtention de résultats inconditionnels, quitte à sacrifier la notion même de motif au profit de celle de système de réalisations. D'autre part, la mise en place d'un programme grandiose pour une théorie générale des motifs mixtes, et l'idée-clé de cohomologie motivique. Les conjectures de Deligne, Beilinson et Bloch-Kato sur les liens entre valeurs de fonctions L et régulateurs ont beaucoup popularisé la théorie des motifs auprès des arithméticiens. Ces développements ont été exposés dans l'ouvrage collectif de référence intitulé *Motives* (conférence de Seattle de 1991, AMS).

Avec le recentrage sur les correspondances algébriques, les années suivantes ont été celles de véritables percées qui ont donné à la théorie des assises non conjecturales, tant dans le domaine des motifs purs — à partir de la démonstration de la conjecture de semi-simplicité des motifs numériques — que dans celui des motifs mixtes, où la théorie de la cohomologie motivique semble parvenue à maturité(1).

Notre propos est de rendre ces avancées accessibles au non-spécialiste, tout en tâchant de donner, au cours des deux premières parties, une vision unitaire de la théorie(2). La troisième partie en est une illustration particulièrement concrète qui pourrait aussi intéresser les spécialistes des nombres transcendants. Nous avons cherché à mettre l'accent sur les aspects structurels, à hiérarchiser et à mettre en valeur la cohérence et la complémentarité des nombreuses conjectures qui forment l'armature idéale au sein de laquelle continue de s'échafauder la théorie.

Yves André,

Paris, le 10 Septembre 2004.

(1)assez pour avoir permis l'attaque des conjectures de Milnor-Bloch-Kato.

(2)en nous limitant pour l'essentiel aux aspects géométriques et catégoriques ; il sera peu question de fonctions L, et rien ne sera dit sur les relations avec « la philosophie de Langlands » [**La79**].

Remerciements. — La tâche serait trop lourde de faire ici la liste de mes dettes intellectuelles, à commencer bien entendu par celles envers les travaux fondateurs d'A. Grothendieck et de P. Deligne. Cette liste devrait transparaître à la lecture du texte.

Sur un plan plus concret, cet ouvrage doit beaucoup à Bruno Kahn et Fabien Morel, à plusieurs titres. Le projet est né lors du groupe de travail sur les motifs que nous organisions ensemble (et avec G. Maltsiniotis) à Jussieu-Chevaleret, et c'est au cours de nombreuses et passionnantes conversations avec eux que je me suis familiarisé avec l'essentiel du contenu de la seconde partie, avant de me plonger dans les textes originaux. Il avait d'ailleurs été envisagé que F. Morel soit l'auteur de cette partie ; il a préféré y renoncer, tout en me laissant des notes préliminaires dont je me suis fort inspiré dans la rédaction des chapitres 15 à 17. B. Kahn m'a fait part de nombreux commentaires critiques très utiles concernant tant la première partie — dont certains passages s'inspirent de nos travaux en collaboration — que la seconde.

Je remercie aussi Pierre Lochak pour sa lecture critique d'une première version du dernier chapitre du livre, ainsi que Peter O'Sullivan et Jean-Benoît Bost pour leurs commentaires.

Notations et conventions. — Nous avons tâché d'appliquer le rasoir d'Ockham à nos universaux et à leur notation. De nombreuses catégories de nature géométrique seront notées avec un suffixe (k) ou $(k)_F$; dans une telle notation, k désignera toujours le corps de *base* de la géométrie, F l'anneau de *coefficients* de la catégorie.

Si A et B sont deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(A,B)$ désigne l'ensemble des morphismes de A vers B dans $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ la catégorie opposée de $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$.

$\mathcal{C}$ est dite F-linéaire si les ensembles de morphismes sont des F-modules, si leur composition est F-linéaire, et si $\mathcal{C}$ admet des sommes directes finies. Les foncteurs entre catégories F-linéaires sont supposés F-linéaires (sur les ensembles de morphismes) ; ils respectent les sommes directes, à isomorphisme naturel près.

On rappelle qu'un foncteur est dit plein (resp. fidèle, resp. pleinement fidèle) s'il est surjectif (resp. injectif, resp. bijectif) sur les ensembles de morphismes.

PARTIE I

MOTIFS PURS

CHAPITRE 1

SOURCES : GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE, COHOMOLOGIE, THÉORIE DE GALOIS

Dans ce chapitre « heuristique », nous présentons librement, sans souci d'exhaustivité, quelques fils conducteurs qui mènent aux motifs. Il ne s'agit pas d'une reconstruction historique de la naissance de la théorie, et les notions qui y apparaissent seront reprises en détail dans les chapitres ultérieurs.

1.1. Géométrie énumérative

1.1.1. L'un des résultats les plus anciens et élémentaires en géométrie projective énumérative est le théorème de Bézout[1] sur le nombre de points communs à deux courbes planes sans composante commune : si les courbes sont les lieux des zéros des polynômes $P(x,y)$, $Q(x,y)$ respectivement, le nombre de points communs, comptés avec multiplicité et en tenant compte des points à l'infini, est $\deg P \cdot \deg Q$. Poncelet[2] a proposé une approche « dynamique » de ce théorème, en déformant Q en un produit de facteurs linéaires $\Pi(a_i x + b_i y)$ en position générale (il est alors clair que chacune des $\deg Q$ droites $a_i x + b_i y$ coupe « $P = 0$ » en $\deg P$ points), et en utilisant son « principe de conservation du nombre ».

Une formulation moderne de ce principe est que l'équivalence algébrique des cycles algébriques, et *a fortiori* l'équivalence rationnelle, est plus fine que l'équivalence numérique. Rappelons brièvement ici les définitions.

Un *cycle algébrique* sur une variété projective lisse X est une combinaison linéaire formelle finie $Z = \sum n_i Z_i$ de sous-variétés irréductibles Z_i de X à coefficients n_i entiers (ou rationnels, selon le contexte). Deux cycles Z et Z' sont dits *rationnellement équivalents* (ce qu'on note $Z \sim_{\mathrm{rat}} Z'$) s'ils peuvent être transformés l'un en l'autre par une succession de déformations rationnelles, *i.e.* paramétrées par la droite projective $\mathbb{P}^1$. Ils sont dits *algébriquement équivalents* (ce qu'on note $Z \sim_{\mathrm{alg}} Z'$) s'ils

---

(1) (1779), mais énoncé avant lui par MacLaurin (1720).

(2) Traité des propriétés projectives des figures (1822).