Revue d'Histoire des Mathématiques

Le tout est-il toujours plus grand que la partie ?

Klaus Volkert

Tome 16 Fascicule 2 2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : `revues@smf.ens.fr` / URL : `http//smf.emath.fr/`

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2010 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 38 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
16 (2010), p. 287–306

LE TOUT EST-IL TOUJOURS PLUS GRAND QUE LA PARTIE ?

Klaus Volkert

Résumé. — On étudie quelques étapes du développement du huitième axiome d'Euclide (« Le tout est plus grand que la partie ») pendant le XIX^{e} et le XX^{e} siècle. L'histoire de cet axiome est liée, d'une part, au problème de la définition de la notion alors fondamentale de « grandeur » et, d'autre part, au problème de la définition de la notion d'« aire d'un polygone ».

Abstract (Is the whole always greater than its part?)— We study some steps of the development of Euclid's axiom no. 8 ("The whole is greater then its part") during the 19th and the 20th century. The history of this axiom is closely related to the problem of defining the then basic notion of a magnitude on one hand and to the problem of defining the notion of the area of a polygon on the other.

« On a vu au mot AXIOME de quelle inutilité ces sortes de principes sont dans toutes les sciences ; il est donc très-à-propos de les supprimer dans les éléments de géométrie, quoiqu'il n'y en ait presque point où on ne les voie paroître encore. Quel besoin

Texte reçu le 12 avril 2007, révisé le 22 septembre 2008, accepté le 8 mars 2010.

K. Volkert, AG Didaktik der Mathematik, Bergische Universität Wuppertal, Gaußstraße 20, 42097 Wuppertal ; Archives Henri Poincaré, Université Nancy 2, LPHS (UMR 7117), 23, bd. Albert I, B.P. 3397, F-54015 Nancy.
Courrier électronique : `klaus.volkert@math.uni-wuppertal.de`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 51-03.
Mots clefs : Aire et axiomes de géométrie.
Key words and phrases. — Area and axioms of geometry.

a-t-on des axiomes sur le tout et sur la partie, pour voir que la moitié d'une ligne est plus petite que la ligne entière ? » [1]

INTRODUCTION

Lorsque l'on se demande quelle était la base des mathématiques classiques (celles d'Euclide, jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle), on est renvoyé tout de suite à la notion de « grandeur ». Dès le début des *Éléments* d'Euclide, les grandeurs sont un grand thème des « notions communes » :

> « 1. *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.*
> 2. *Et si, à deux choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*
> 3. *Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.* » [Euclide 1990, p. 178].

Dans ces notions communes, nous apprenons que l'on peut ajouter et retrancher des grandeurs à d'autres et que l'on peut les comparer — les grandeurs sont donc susceptibles d'être l'objet d'un calcul (qui est pour Euclide un calcul non numérique [2]). Il est présupposé par Euclide que les grandeurs sont classées par leur propre nature en des espèces — appelées des grandeurs homogènes. Ce point important n'est pas explicité jusqu'au début du cinquième livre (définition 5). Des exemples concrets sont fournis par les segments, les angles, les aires et les volumes — chaque classe désignant une espèce homogène. Dans une telle classe, on peut comparer deux grandeurs (par exemple deux segments) selon leur « grandeur », c'est-à-dire par leur rapport en analogie, on peut les ajouter et l'on peut retrancher une grandeur d'une autre qui est plus grande. Il y a aussi une sorte de multiplication — c'est le produit d'un nombre entier positif par une grandeur, défini comme une addition itérée.

La liste des notions communes — on en compte neuf chez Vitrac — contient la phrase suivante :

> « 8. *Et le tout est plus grand que la partie.* »

---

1 Article « Géométrie » signé O (c'est-à-dire d'Alembert) dans l'[Enc 1784, vol. II, p. 136].

2 Cf. la discussion de ce point par Vitrac [Euclide 1990, p. 179]

Dans cet article, nous allons étudier l'histoire d'un cas spécial de cette notion commune — celui des aires —, quelquefois appelé « axiome de De Zolt » en référence au mathématicien italien A. De Zolt (1881). Nous commençons par quelques remarques concernant le premier livre des *Éléments*, le but étant de comprendre l'idée de grandeur chez Euclide et d'identifier l'usage qu'il fait de l'axiome 8 ; un tel retour est nécessaire parce que la théorie d'Euclide a servi de référence jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle. Nous allons nous concentrer sur le cas des aires des polygones plans. C'est le cas le plus simple qui ne soit pas trivial [3]. Notre choix est aussi justifié par l'histoire, car c'est exactement le cas des aires des polygones plans qui a été au XIX^{e} siècle le point de départ d'un travail critique dans le contexte du mouvement axiomatique. Un événement important fut notamment la parution des *Fondements de la géométrie* de Hilbert (1899/1900), où le problème des aires des polygones joue un rôle clef (cf. § 3). Notre travail portera donc principalement sur la seconde moitié du XIX^{e} et le début du XX^{e} siècle ; nous ne nous proposons pas de fournir une étude complète des périodes antérieures.

Remerciements

Jean-Pierre Friedelmeyer, Philippe Nabonnand, Dominique Tournès et les rapporteurs anonymes m'ont assisté pour la rédaction de ce texte. Je les en remercie chaleureusement.

1. LES AIRES DANS LES *ÉLÉMENTS*

La notion d'aire n'est pas définie par Euclide de manière explicite. Elle apparaît pour la première fois dans la proposition 35 du premier livre :

---

3 Comme celui des segments. Par contre, le cas des volumes est trop compliqué pour une analyse par les méthodes proposées dans ce qui suit. Le résultat de Max Dehn (1900) montre qu'il y a des pyramides de volumes égaux qui ne sont pas équidécomposables (pour une définition de cette notion, cf. § 1). Euclide lui-même a entrepris quelques tentatives dans cette direction dans le onzième livre des *Éléments*, cf. XI, 28-31 [Euclide 2001, p. 179-200].