

Astérisque

JEAN-LOUIS VERDIER

MALTISINIOTIS GEORGES (éd.)

Des catégories dérivées des catégories abéliennes

Astérisque, tome 239 (1996)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__239__R1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__239__R1_0)

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

239

ASTÉRISQUE

1996

**DES CATÉGORIES DÉRIVÉES
DES CATÉGORIES ABÉLIENNES**

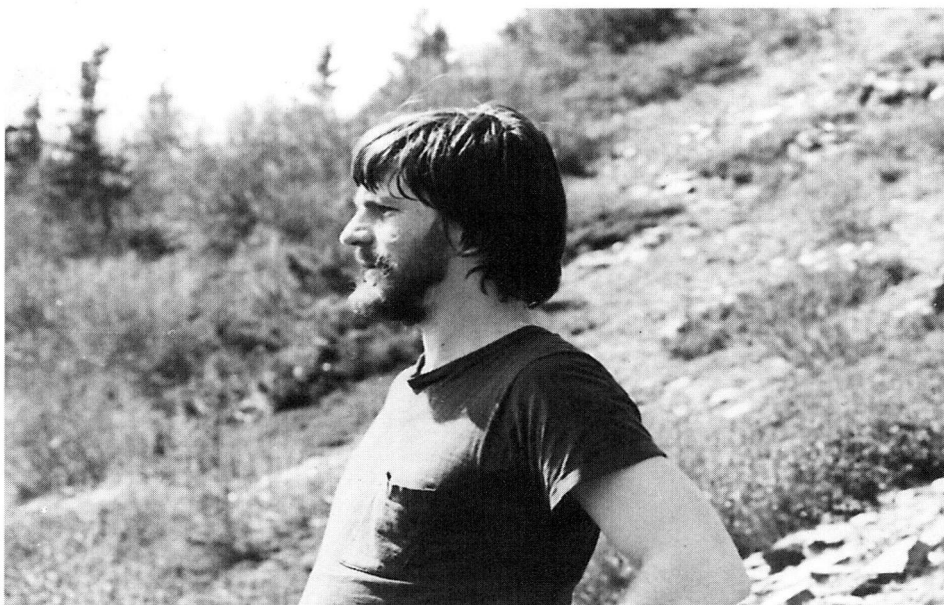
Jean-Louis VERDIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects classification :

14F20, 18E30, 18E35, 18G05, 18G10, 18G15, 18G20, 18G35,
18G40, 55U15, 55U25, 55U30.



Jean-Louis VERDIER, 1977

Préface

Jean-Louis Verdier, tragiquement disparu le 25 août 1989, a soutenu sa thèse de doctorat d'État, intitulée *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, le 14 juin 1967, à Paris. Le présent texte est celui du manuscrit dactylographié de cette thèse, dans sa dernière version. Les éditeurs se sont bornés à corriger des erreurs de détail. Seule la partie intitulée *Introduction* avait été déposée à la faculté. Le corps du texte était inachevé à la date de la soutenance, et l'est resté.

La genèse de ce travail est assez bien connue (cf. [I]). On sait que Grothendieck conçut l'idée des catégories dérivées au début des années soixante pour fournir le cadre d'algèbre homologique nécessaire à la vaste généralisation des théorèmes de dualité qu'il avait imaginée à la suite de son exposé au congrès international d'Édinbourg de 1958. Il avait proposé à Verdier, comme sujet de thèse, de construire le formalisme envisagé. En 1963, Verdier faisait paraître un fascicule de résultats résumant l'essentiel de la théorie, *Catégories dérivées, quelques résultats (État 0)*, miméographié par l'IHÉS (reproduit dans [SGA 4 1/2]). Si la notion de catégorie dérivée est due à Grothendieck, c'est à Verdier que revient d'avoir introduit, en amont, celle de catégorie triangulée. L'axiomatique présentée là, inspirée de la théorie homotopique stable (cf. [P]), devait se révéler d'une surprenante fécondité.

Ce n'est que plusieurs années après que Verdier entreprend une rédaction d'ensemble de son travail. Pourquoi ne l'a-t-il pas terminée? Bien des hypothèses ont été avancées. Je pencherais pour la suivante. La partie qui manque est la théorie des foncteurs dérivés. Quand Verdier en arrive à cet endroit de sa rédaction, les catégories dérivées ont déjà été largement utilisées en géométrie algébrique. Diverses variantes et généralisations se développent : notion de dérivabilité ponctuelle à la Deligne, foncteurs dérivés non additifs (algèbre homotopique à la Quillen), foncteurs dérivés filtrés. Dès lors, le cadre fixé par le fascicule de résultats s'avérait insuffisant. Trouver le bon point de vue aurait demandé un nouveau travail de fondements que Verdier, intéressé à cette époque par d'autres problèmes, n'a eu, me semble-t-il, ni le loisir ni sans doute l'envie de réaliser. À mesure que le temps passait, des articles sur

les catégories dérivées paraissaient et l'usage s'en répandait, le formalisme envahissant d'autres domaines des mathématiques (comme les équations aux dérivées partielles linéaires). L'achèvement de son ouvrage devenait alors aux yeux de Verdier une tâche de moins en moins nécessaire ...

Tout incomplet qu'il est, ce texte de Verdier constitue néanmoins une référence précieuse, voire irremplaçable (par exemple, la présentation, originale et élégante, qui y est donnée des suites spectrales ne se trouve, à ma connaissance, nulle part ailleurs). On ne peut que se réjouir qu'il voie enfin le jour.

Paris, le 27 avril 1996

Luc Illusie

Références

[I] L. Illusie, *Catégories dérivées et dualité, travaux de J.-L. Verdier*, L'Enseignement Mathématique, 36 (1990), 369-391. (Exposé donné le 19 octobre 1989, lors de la cérémonie en hommage à Jean-Louis Verdier organisée par l'Université Paris VII.)

[P] D. Puppe, *On the formal structure of stable homotopy theory*, Colloquium on Algebraic Topology, Aarhus Universitet (1962), 65-71.

[SGA 4 1/2] "Cohomologie étale", Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, SGA 4 1/2, par P. Deligne, Lecture Notes in Mathematics 569, Springer-Verlag (1977), 262-311.

Note des éditeurs

C'est lors de la cérémonie en hommage à J.-L. Verdier, organisée par l'Université Paris VII, le 19 octobre 1989, que M. Artin, P. Cartier et L. Illusie eurent l'idée de publier la thèse de J.-L. Verdier. Deux ans plus tard je me joignais à eux et j'obtenais, grâce à l'appui de J. Le Potier et de M. Broué, un financement de Paris VII (URA 212) et de l'ÉNS (DMI) pour une saisie de ce texte en $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Une fois la frappe terminée, le résultat fut soigneusement comparé à l'original dactylographié de Verdier. Il restait encore à faire une relecture mathématique car Verdier n'avait jamais effectué les dernières corrections.

Cette lecture attentive a été faite, avec un extrême soin, par P. Cartier (chapitre I), B. Keller (chapitre III), et, pour l'ensemble du texte, par M. Zisman et moi-même. En dehors des nombreuses coquilles qui ne méritent pas d'être énumérées, les principales modifications apportées sont les suivantes. Dans le chapitre I, la proposition (3.1.5) affirmait une équivalence. Cette équivalence a été remplacée par une implication, la réciproque (jamais utilisée par la suite) étant fausse. Dans la proposition (3.4.1), il y avait une erreur de signe, induisant des erreurs de signe dans le chapitre III ((1.3.4), (b) et (3.2.7.3)). Ceci a conduit à adapter la définition de la "catégorie triangulée opposée" (chap. II, 1.1.7) afin que reste vraie l'affirmation : *la catégorie dérivée de la catégorie opposée est la catégorie triangulée opposée à la catégorie dérivée*.

Dans le chapitre II, l'ordre des propositions du §1.2 a été modifié. En effet, Verdier s'était rendu compte, après la rédaction, que l'assertion que la somme directe de deux triangles distingués est un triangle distingué est conséquence des autres axiomes des catégories triangulées. Il l'avait donc supprimée de la liste des axiomes, sans effectuer les remaniements qui en résultaient. D'autre part, les alinéas (2.3.6) et (2.3.7) qui n'étaient pas utilisés dans la suite, et dont la vérification a échoué, ont été supprimés. La définition de la notion d'objet spectral stationnaire (4.4.2) a été légèrement modifiée, la définition originale étant trop faible pour l'établissement du théorème (4.4.3) qui suivait. Il a été vérifié que cela était sans conséquence pour la suite.

L'index de notations et l'index terminologique ont été complétés. En revanche, la bibliographie a été laissée inchangée (sauf pour les SGA dont les références définitives dans les “Lecture Notes” ont été indiquées). En particulier, l'absence de référence numéro 13 n'a pas été comblée.

Je voudrais remercier vivement M. Broué, A. Bruguières, P. Cartier, L. Gruson, L. Illusie, B. Keller, J. Le Potier, M. Zisman, ainsi que l'Université Paris VII, l'École Normale Supérieure, et l'Institut des Hautes Études Scientifiques, qui ont aidé à divers titres à la réalisation de ce projet. Je remercie également C. Defosse et C. Gourgues pour avoir patiemment saisi cet ouvrage en $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - TEX .

J'aurais aimé pouvoir étendre ces remerciements à L. Doustaing prématurément disparu en décembre 1994.

Paris, le 14 juin 1996

Georges Maltsiniotis

Publications de J.-L. Verdier

- [01] *Sur les intégrales attachées aux formes automorphes* (d'après G. Shimura), Séminaire Bourbaki 1960-61, n° 216, pp. 216-1 à 216-27, Benjamin (1966).
- [02] *Le théorème de dualité de Poincaré*, C.R.A.S. t. 256, pp. 2084-2086, Gauthier-Villars (1963).
- [03] *Seminar on étale cohomology of number fields* (en collaboration avec M. Artin), Woods Hole Conference on Algebraic Geometry, A.M.S. (1964).
- [04] *Équivalence essentielle des systèmes projectifs*, C.R.A.S. t. 261, pp. 4950-4953, Gauthier-Villars (1965).
- [05] *Dimension des espaces localement compacts*, C.R.A.S. t. 261, pp. 5293-5296, Gauthier-Villars (1965).
- [06] *Dualité dans la cohomologie des groupes profinis*, Appendice à "Cohomologie galoisienne" (Jean-Pierre Serre), Lecture Notes in Mathematics 5, pp. 183-206, Springer (1964), quatrième édition (1973).
- [07] *Faisceaux constructibles sur un espace localement compact*, C.R.A.S. t. 262, pp. 12-15, Gauthier-Villars (1966).
- [08] *Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts*, Séminaire Bourbaki 1965-66, n° 300, pp. 300-01 à 300-13, Benjamin (1966).
- [09] *The Lefschetz fixed point formula in étale cohomology*, Conference on Local Fields, NUFFIC Summer School held at Driebergen in 1966, pp. 199-214, Springer (1967).
- [10] *A duality theorem in the étale cohomology of schemes*, Conference on Local Fields, NUFFIC Summer School held at Driebergen in 1966, pp. 184-198, Springer (1967).
- [11] *Base change for twisted inverse image of coherent sheaves*, Bombay Colloquium on Algebraic Geometry in 1968, pp. 393-408, Oxford University Press (1969).