

Astérisque

LAURENT LAFFORGUE

Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson

Astérisque, tome 243 (1997)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1997__243__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1997__243__1_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

243

ASTÉRISQUE

1997

**CHTOUCAS DE DRINFELD
ET CONJECTURE
DE RAMANUJAN-PETERSSON**

Laurent LAFFORGUE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Laurent Lafforgue (Equipe de recherche associée D0752 du CNRS).

Mots-clés : géométrie algébrique arithmétique, corps de fonctions, variétés modulaires de Drinfeld, représentations automorphes, opérateurs de Hecke, formule des points fixes, formule des traces de Selberg.

Code matière AMS 1980 (version 1985) : 11 G, 14 G 25, 11 G 09, 11 F 70, 11 F 60, 14 F 20, 11 F 72.

Table des matières

Introduction	5
---------------------------	---

Chapitre I – $\mathcal{D}$ -chtoucas : généralités

1. — Définitions, structures de niveau, opérations	15
a) Notations	15
b) $\mathcal{D}$ -chtoucas à droite et à gauche	16
c) Structures de niveau en dehors du zéro et du pôle	18
d) Les opérations Frob_0 , Frob_∞ et $*$	20
e) Les opérateurs de Hecke	22
f) Le morphisme $\det : \text{Cht}_{\mathcal{D},I}^r \rightarrow \text{Cht}_{\mathcal{O}_X,I}^1$	26
2. — Représentabilité. Lissité	29
3. — Chtoucas triviaux. Applications	41
4. — Correspondances de Hecke	48
a) Préliminaires	48
b) Algèbres de Hecke	49
c) Correspondances de Hecke	50
d) Sous-champs des points fixes	56

Chapitre II – Chtoucas réductibles. Filtrations de Harder–Narasimhan

1. — $\mathcal{D}$ -Chtoucas réductibles. Sous-champs d’iceux	59
a) Définitions	59
b) Les morphismes $\text{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,r'} \rightarrow \text{Cht}_{\mathcal{D},I}^r$ et $\text{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,r-r'} \rightarrow \text{Cht}_{\mathcal{D},I}^r$	64
c) Les morphismes $\text{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} \rightarrow \text{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} \times \text{Spec } \mathbb{F}_q / \text{Aut } E$ et $\text{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_q / \text{Aut } E \times \text{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'}$	70
d) Les champs $\text{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{F}})$ et $\text{Ext}_{\mathcal{D},I}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{E})$	76

TABLE DES MATIÈRES

2. — Filtrations canoniques de Harder–Narasimhan. Applications . . .	85
a) Pentès. Filtrations canoniques de Harder–Narasimhan . . .	85
b) Les sous-champs ouverts $\text{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$	94
c) Les horocycles	101

Chapitre III – Description adélique des chtoucas. Nombres de Lefschetz

1. — Rappels : φ -espaces et F_x -modules de Dieudonné, d'après Drinfeld	105
2. — Description à isogénie près des $\mathcal{D}$ -chtoucas de rang r sur $\overline{\mathbb{F}_q}$. . .	110
3. — Description d'une classe d'isogénies de $\mathcal{D}$ -chtoucas	123
4. — Description des groupoïdes de points fixes	129
5. — Nombres de Lefschetz	139
a) Polygones de Harder–Narasimhan	139
b) Définition des nombres de Lefschetz	144
6. — Expression intégrale des nombres de Lefschetz	147
a) Fonctions de troncature	147
b) Expression intégrale	152
c) Transfert pour les termes elliptiques	158

Chapitre IV – Le cas des $\mathcal{D}$ -chtoucas de rang $r = 1$

1. — Projectivité	163
2. — Cohomologie ℓ -adique des schémas $\text{Cht}_{\mathcal{D},I}^1/a^{\mathbb{Z}}$	166
3. — Généralités sur les représentations admissibles	177
a) Représentations admissibles. Homomorphismes de traces	177
b) Corps de rationalité. Corps de définition	182
c) Représentations admissibles des produits tensoriels d'algèbres	186
4. — Calcul des traces. Applications	191
a) Formules des traces	191
b) Représentations automorphes	197
c) Représentations ℓ -adiques de $\Gamma_F \times \Gamma_F$ attachées aux représentations automorphes	201
d) Représentations ℓ -adiques de Γ_F attachées aux représentations automorphes	209

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre V – Calcul des nombres de Lefschetz en rang $r \geq 2$

1. — Polygones canoniques de Harder–Narasimhan et troncatures d'Arthur	217
a) Petit dictionnaire des adèles et des fibrés	217
b) Polygones et filtrations canoniques de Harder–Narasimhan	218
c) Troncatures par le polygone canonique. Un peu de combinatoire	220
d) Conséquences de l'invariance locale	223
e) Conséquences de la compacité du support	225
2. — Transfert	229
a) Traces tronquées d'Arthur et nombres de Lefschetz	229
b) Une fonction de troncature auxiliaire	231
c) Première transformation	235
d) Suite et fin du calcul	241
3. — Le cas où χ a plusieurs facteurs premiers distincts	247
a) Préliminaires	247
b) Démonstration du théorème 10 (i) du paragraphe V.2d	253
4. — Le cas où χ est une puissance d'un polynôme irréductible	256
a) Préliminaires sur les sous-groupes de commutateurs et les intégrales orbitales	256
b) Encore une nouvelle fonction de pente maximale	260
c) Introduction d'un facteur de convergence	264
d) Décomposition par classes de conjugaison et par places	268

Chapitre VI – Formule des traces d'Arthur–Selberg et conjecture de Ramanujan–Petersson

1. — Rappels sur la décomposition spectrale de Langlands	279
a) Notations	279
b) Degrés. Polygones. Groupes de caractères	280
c) Paires discrètes	282
d) Séries d'Eisenstein. Opérateurs d'entrelacement	284
e) La décomposition spectrale de Langlands	287
f) Expression spectrale des noyaux	289
2. — La formule des traces d'Arthur–Selberg : le côté spectral	290
a) Une assertion d'intégrabilité	290
b) Démonstration de ladite intégrabilité	292

TABLE DES MATIÈRES

c)	Première transformation des coefficients de Fourier par échange de deux sommations	298
d)	Transformées de Fourier des fonctions de troncature. Condition de recollement d'Arthur	300
e)	Calcul des coefficients de Fourier au moyen de l'isométrie de Langlands	304
f)	Enoncé des résultats	307
3. —	Application à la conjecture de Ramanujan-Petersson	310
a)	Composantes locales. Valeurs propres des opérateurs de Hecke	310
b)	Rappels sur les zéros et pôles des opérateurs d'entrelacement	312
c)	Rappels sur les spectres discrets, d'après Mœglin et Waldspurger	313
d)	Enoncé du théorème principal	314
e)	Commencement de la démonstration : Application de la formule des traces d'Arthur-Selberg, du théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz et du théorème de pureté de Deligne	316
f)	Fin de la démonstration : Identification de la forme des différents termes dans la formule des traces	319
Bibliographie		327

Introduction

L'objet principal de ce livre est la conjecture de Ramanujan-Petersson sur les corps de fonctions. Rappelons de quoi il s'agit.

On considère F un corps de fonctions dont le corps des constantes $\mathbb{F}_q$ est fini à q éléments, F_x les complétés de F en les différentes places x , $\deg_x$ les valuations associées et $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F .

Toute représentation admissible irréductible π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $r \geq 1$, est un produit $\bigotimes_x \pi_x$ de représentations admissibles irréductibles des $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Pour presque toute x , π_x est non ramifiée et il existe dans $\mathbb{C}^\times$ r nombres $z_1(\pi_x), \dots, z_r(\pi_x)$, bien définis à permutation près, tels que π_x soit un sous-quotient de l'induite normalisée du caractère $(q^{\frac{1-r}{2} \deg(x)} z_1(\pi_x))^{\deg_x(\cdot)} \times \dots \times (q^{\frac{1-r}{2} \deg(x)} z_r(\pi_x))^{\deg_x(\cdot)}$ de $\mathrm{GL}_1(F_x) \times \dots \times \mathrm{GL}_1(F_x)$. Quand π_x est unitaire, la famille $\{|z_1(\pi_x)|, \dots, |z_r(\pi_x)|\}$ dans $\mathbb{R}_+^\times$ est symétrique par rapport à $q^{\frac{r-1}{2} \deg(x)}$.

D'autre part, à toutes représentations automorphes cuspidales irréductibles unitaires π, π' de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, $r, r' \geq 1$, est associée la fonction $s \mapsto L(s, \pi \otimes \pi')$ de Rankin-Selberg. C'est une fonction rationnelle en q^s dont les pôles sont sur les droites $\mathrm{Re} s = 0$, $\mathrm{Re} s = 1$.

Les deux conjectures suivantes sont bien connues :

CONJECTURE 1 (Ramanujan-Petersson). — *Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. Alors, en toute place x où π est non ramifiée, on a $|z_i(\pi_x)| = q^{\frac{r-1}{2} \deg(x)}$, $1 \leq i \leq r$.*

CONJECTURE 2. — *Soient π, π' deux représentations automorphes cuspidales irréductibles unitaires de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$. Alors tous les zéros de la fonction $s \mapsto L(s, \pi \otimes \pi')$ sont sur la droite $\mathrm{Re} s = \frac{1}{2}$.*

Rappelons que Drinfeld a successivement prouvé la conjecture 1 (et même en fait la correspondance de Langlands) dans les cas suivants :

- quand une des composantes π_x de π est la représentation de Steinberg et $r = 2$, en étudiant la cohomologie à coefficients constants des variétés modulaires classifiant les faisceaux elliptiques de rang 2 (et ce travail a été généralisé par Laumon en rang quelconque);
- quand une des composantes π_x de π est supercuspidale et $r = 2$, en étudiant la cohomologie à coefficients dans certains systèmes locaux des variétés modulaires classifiant les faisceaux elliptiques de rang 2 (et ce travail a été généralisé par Flicker et Kazhdan en rang quelconque);
- quand $r = 2$, en étudiant la cohomologie des variétés modulaires

INTRODUCTION

classifiant les chtoucas de rang 2.

Rappelons d'autre part que dans la situation de la conjecture 1, Jacquet et Shalika ont obtenu l'encadrement $q^{-\frac{1}{2} \deg(x)} < q^{\frac{1-r}{2} \deg(x)} |z_i(\pi_x)| < q^{\frac{1}{2} \deg(x)}$, $1 \leq i \leq r$, et que dans la situation de la conjecture 2, Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shahidi et Shalika ont montré que les zéros de la fonction L envisagée sont dans la bande $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME PRINCIPAL. —

(i) *Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible unitaire de $\operatorname{GL}_r(\mathbb{A})$. Alors :*

- *Si r est impair, π vérifie la conjecture 1 et on pose $\varepsilon_\pi = 0$.*
- *Si r est pair, ou bien π vérifie la conjecture 1 et on pose $\varepsilon_\pi = 0$, ou bien pour toute place x où π est non ramifiée, la moitié parmi les $z_i(\pi_x)$, $1 \leq i \leq r$, sont de module $q^{(\frac{r-1}{2} + \frac{1}{4}) \deg(x)}$ et l'autre moitié de module $q^{(\frac{r-1}{2} - \frac{1}{4}) \deg(x)}$ et on pose $\varepsilon_\pi = \frac{1}{4}$.*

(ii) *Pour deux telles représentations π, π' de $\operatorname{GL}_r(\mathbb{A})$, $\operatorname{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, tous les zéros de $L(s, \pi \otimes \tilde{\pi}')$ sont sur la droite $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ si $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi'}$ et sur les droites $\operatorname{Re} s = \frac{1}{4}$, $\operatorname{Re} s = \frac{3}{4}$ si $\varepsilon_\pi \neq \varepsilon_{\pi'}$.*

La démonstration de ce théorème est calquée sur celle de Drinfeld en rang 2. On s'intéresse aux modules d'éléments $\{z_i(\pi_x)\}$ et $\{q^s, L(s, \pi \otimes \tilde{\pi}') = 0\}$. L'idée est de relier ces derniers aux valeurs propres de l'opérateur de Frobenius agissant sur la cohomologie à supports compacts d'une certaine variété de type fini sur $\mathbb{F}_q$ (en combinant le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz et une formule des traces d'Arthur-Selberg convenable) et d'invoquer le théorème de pureté de Deligne. Drinfeld a introduit des objets permettant de réaliser ce projet. Ce sont les variétés (ou plutôt les champs) classifiant les chtoucas de rang r .

Ce livre rassemble la thèse de l'auteur (Orsay, 1994) et une prépublication ultérieure (Orsay, 1995). Un résumé en a été présenté dans deux notes parues aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (tome 322, série I, 1996).

En voici le contenu détaillé :

On commence dans le chapitre I par rappeler la définition des chtoucas ainsi que les principales propriétés géométriques de leurs champs classifiants.

Soit X la courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$ dont le corps des fonctions est F . Par souci de généralité et suivant une idée de Stuhler, on introduit également D une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F et $\mathcal{D}$

INTRODUCTION

une $\mathcal{O}_X$ -Algèbre finie de fibre générique D qui soit maximale pour cette propriété.

Un $\mathcal{D}$ -chtouca de rang r sur un schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) est un diagramme

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} {}^\tau\mathcal{E}$$

où $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$ -Modules à droite localement libres de rang r sur $X \times S$, ${}^\tau\mathcal{E}$ désigne le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$ -Module $(\text{Id}_X \times \text{Frob}_S)^*\mathcal{E}$, et j et t sont des homomorphismes $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$ -linéaires, injectifs et dont les conoyaux sont supportés respectivement par les graphes de morphismes pôle $i_\infty : S \rightarrow X$ et zéro $i_0 : S \rightarrow X$ et sont localement libres de rang d comme $\mathcal{O}_S$ -Modules.

Etant donné $I \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini évitant le zéro et le pôle, une structure de niveau I sur un tel $\mathcal{D}$ -chtouca consiste en la donnée d'isomorphismes $\mathcal{E}_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S$, $\mathcal{E}'_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S$ compatibles avec j et t .

On généralise les résultats de [Drinfeld, 1987] en s'inspirant des arguments de [Laumon, Rapoport, Stuhler]. On prouve que les champs $\text{Cht}_{\mathcal{D},I}^r$ classifiant les $\mathcal{D}$ -chtoucas de rang r avec structure de niveau I sont algébriques au sens de Deligne–Mumford. L'application qui à un $\mathcal{D}$ -chtouca associe son zéro et son pôle définit des morphismes $\text{Cht}_{\mathcal{D},I}^r \rightarrow X \setminus I \times X \setminus I$ qui sont localement de type fini et même lisses de dimension relative $2(rd - 1)$ au-dessus de $X' \setminus I \times X' \setminus I$, où l'on note X' le plus grand ouvert de X en tous les points fermés duquel l'algèbre D est déployée. Et pour tous sous-schémas fermés finis emboîtés $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$, le foncteur d'oubli $\text{Cht}_{\mathcal{D},J}^r \longrightarrow \text{Cht}_{\mathcal{D},I}^r$ au-dessus de $X \setminus J \times X \setminus J$ est représentable fini étale galoisien.

En notant Λ le schéma complémentaire dans $X \times X$ de la diagonale et de ses transformées par les puissances de $(\text{Frob}_X \times \text{Id}_X)$ et de $(\text{Id}_X \times \text{Frob}_X)$, on dispose dans les $\text{Cht}_{\mathcal{D},I}^r$ de deux morphismes de Frobenius partiels Frob_0 et Frob_∞ au-dessus des endomorphismes $(\text{Frob}_X \times \text{Id}_X)$ et $(\text{Id}_X \times \text{Frob}_X)$ de Λ . Leur composé dans un sens ou dans l'autre est le morphisme de Frobenius.

Soient $a \in \mathbb{A}^\times$ un idèle de degré 1, $\mathcal{D}_\mathbb{A}$ l'ordre maximal dans $D_\mathbb{A} = D \otimes_F \mathbb{A}$ qui correspond à $\mathcal{D}$, G le schéma en groupes sur F des automorphismes de $E = D^r$, K le sous-groupe ouvert compact maximal $\text{GL}_r(\mathcal{D}_\mathbb{A})$ de $\text{GL}_r(D_\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})$, $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A})$ c'est-à-dire l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact de $G(\mathbb{A})$ dans $\mathbb{Q}$ et, pour tout $I \hookrightarrow X$, $\mathcal{H}_I$ la sous-algèbre des fonctions invariantes à gauche et à droite par $K_I = \text{Ker}[K \rightarrow \text{GL}_r(\mathcal{D}_I)]$.

Alors on dispose sur le champ représentable $\varprojlim_I \text{Cht}_{\mathcal{D},I}^r / a^\mathbb{Z}$ d'une action à droite de $G(\mathbb{A})$. Elle est équivalente à la donnée, pour tout $I \hookrightarrow X$, d'un