

Astérisque

PIERRE COLMEZ

Intégration sur les variétés p -adiques

Astérisque, tome 248 (1998)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__248__R1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__248__R1_0)

© Société mathématique de France, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASTÉRISQUE 248

INTÉGRATION SUR LES VARIÉTÉS
 p -ADIQUES

Pierre Colmez

Société Mathématique de France 1998

Pierre Colmez

Département de mathématiques et informatique, École Normale Supérieure,
45 rue d'Ulm, 750005 Paris, France.

Équipe d'arithmétique, Institut de mathématiques,
Tour 46-56 -5ème étage- Boite 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

Classification mathématique par sujets (1991). — 115, 14H, 14K, 14L, 30F, 30G, 32J.

Mots clefs. — Intégrale abélienne, période complexe, période p -adique, extension universelle, variété abélienne, jacobienne, fonction de Green, fonctions thêta, hauteurs de Néron-Tate.

INTÉGRATION SUR LES VARIÉTÉS p -ADIQUES

Pierre Colmez

Résumé. — Dans ce volume, nous montrons qu'il y a essentiellement une seule manière d'intégrer une 1-forme différentielle fermée sur une variété algébrique lisse définie sur un corps p -adique. Cette théorie de l'intégration p -adique, contrairement à celle développée par Coleman, ne suppose pas d'hypothèses de bonne réduction des variétés que l'on considère et permet d'étendre au cas général un certain nombre de théorèmes démontrés par Coleman dans le cas de bonne réduction ; en particulier, la construction des périodes p -adiques des variétés abéliennes et la loi de réciprocité pour les formes différentielles de troisième espèce sur les courbes. L'intérêt d'avoir une théorie qui marche pour tous les nombres premiers est de pouvoir adéliser certaines constructions. Par exemple, si X est une courbe algébrique définie sur un corps de nombres, nous contruisons de manière purement analytique un accouplement sur les diviseurs de degré 0 de X en utilisant des fonctions de Green adéliques et à partir duquel, on peut retrouver la hauteur de Néron-Tate et les hauteurs p -adiques construites par Gross et Coleman dans le cas de bonne réduction. Ce volume ne contient donc pas à proprement parler d'énoncé nouveau, mais essaie de faire la synthèse entre plusieurs points de vue ; en particulier, la construction adélique des hauteurs peut être vue comme une synthèse entre le point de vue de Néron et celui de Gross et Coleman.

Abstract (Integration on p -adic varieties). — We show that there is a unique “reasonable” way of integrating closed 1-forms on smooth algebraic varieties defined over a p -adic field. In contrast with the theory developed by Coleman, this p -adic integration does not require that the varieties under consideration have good reduction and can be used to extend to the general case several results obtained by Coleman in the case of good reduction ; in particular the construction of p -adic periods of abelian varieties and the reciprocity law for differentials of the third kind. Having a theory which works for all primes can be used to adelize certain constructions. For example, if X is a smooth and proper algebraic curve defined over a number field, we define, in a purely analytic way, a pairing between divisors of degree 0 using adelic Green functions and from which one can recover the Néron-Tate height pairing and p -adic analogues considered by Gross and Coleman in the case of good reduction.

Table des matières

Introduction	1
1. Intégration p -adique sur les variétés p -adiques	1
2. La loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce sur les courbes	4
3. Hauteurs adéliques sur les courbes algébriques	5
4. Ensembles bornés	6
5. Périodes p -adiques des variétés abéliennes	8
6. Extension universelle et revêtement universel	9
7. Relations de Riemann p -adiques	10
8. Plan du volume	10
I. Intégrales abéliennes complexes	13
I.1. Formes différentielles et périodes	13
1. La formule de Legendre	13
2. Rappels sur la cohomologie d'une variété algébrique	14
3. Classes de cohomologie d'un diviseur	18
4. Formes différentielles et résidus	19
5. Formes de seconde espèce	23
I.2. Intégrales abéliennes sur les courbes algébriques	24
1. Intégrales de première et seconde espèces	24
2. La loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce	28
3. Fonction de Green d'un diviseur de degré 0	30
I.3. Tores complexes et variétés abéliennes	31
1. Le théorème de Lefschetz	31
2. Morphismes de tores complexes	32
3. Le tore dual	33
4. Le théorème d'Appell-Humbert	34
5. Relations de Riemann	35
6. Théorèmes du carré et du cube	36
7. Accouplement de Weil sur les variétés abéliennes	38
8. La fonction de Green d'un diviseur	39

I.4. La jacobienne d'une courbe algébrique	40
1. Algébricité de la jacobienne	40
2. La fonction thêta de Riemann et le diviseur Θ	41
3. Le théorème d'Abel	42
4. Accouplement de Weil sur une courbe algébrique	44
I.5. Variétés d'Albanese et de Picard	45
1. Variété d'Albanese	45
2. Propriété universelle de la variété d'Albanese	48
3. Variété de Picard	50
4. Questions de compatibilité	51
5. Le fibré de Poincaré	52
I.6. Extensions de variétés abéliennes	53
1. Fibrés en groupes algébriques	53
2. Formes différentielles et fibrés en groupes	55
3. Extensions de variétés abéliennes	57
4. Systèmes de facteurs	58
5. Extensions et systèmes de facteurs	60
6. Formes différentielles et groupes algébriques	63
I.7. Extension universelle et formes de troisième espèce	64
1. L'extension universelle d'une variété abélienne	64
2. L'extension universelle de la variété d'Albanese	66
3. Extension universelle de $\text{Pic}^0(X)$ et formes de troisième espèce . . .	66
4. Formes de troisième espèce et fibré de Poincaré	70
5. La loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce (bis) ..	71
 II. Intégrales abéliennes p-adiques	73
II.1. Intégration sur les variétés p -adiques	73
1. Énoncé du problème	73
2. Le cas des variétés abéliennes	76
3. Le cas général	83
4. Le point de vue de Zarhin	85
II.2. Intégration p -adique sur les courbes	86
1. Intégrales de première et seconde espèces	86
2. Le diviseur Θ et ses fonctions de Green	87
3. Intégrales de troisième espèce	92
4. La loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce	94
5. Compléments sur la fonction logarithme	97
6. Fonctions de Green adéliques et hauteurs adéliques	98
7. Fonction de Green d'un point	101
II.3. Périodes p -adiques des variétés abéliennes	102
1. Construction de l'accouplement « périodes p -adiques »	102
2. Relations de Riemann p -adiques	106
3. Formes de seconde espèce et formes exactes	110
4. Théorie de Kummer et exponentielle de Bloch-Kato	113

A. Ensembles bornés	117
A.1. Généralités sur les schémas	117
A.2. Ensembles bornés	117
A.3. Épaississements p -adiques	123
A.4. Sous-ensembles bornés des épaississements p -adiques	126
A.5. Retour sur les ensembles bornés	129
A.6. Compléments dans le cas d'une boule	133
A.7. Ensembles bornés sur les variétés abéliennes	134
B. Revêtements universels p-adiques	137
B.1. Revêtement universel d'un groupe algébrique	137
B.2. Applications aux variétés abéliennes	140
1. Périodes p -adiques des formes de seconde espèce	140
2. Périodes p -adiques des formes de troisième espèce	142
B.3. Revêtement universel d'une famille de variétés abéliennes	143
C. Résultats de théorie des groupes	147
Bibliographie	153

INTRODUCTION

1. Intégration p -adique sur les variétés p -adiques

Soit K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. Le principal problème de l'intégration p -adique est que la topologie p -adique est totalement discontinue et donc que l'équation différentielle $df = 0$ a beaucoup trop de solutions. Ce problème apparaît déjà quand on veut définir le logarithme p -adique ; en effet, imposer la condition $d \operatorname{Log} t = \frac{dt}{t}$ ne définit Log qu'à addition d'une fonction localement constante près sur K^* ; rajouter la condition $\operatorname{Log}(xy) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y$ détermine complètement Log sur $\mathcal{O}_K^*$, mais il nous reste la liberté de fixer arbitrairement la valeur de $\operatorname{Log} p$. Le choix naturel est de poser $\operatorname{Log} p = 0$, ce qui nous donne le logarithme d'Iwasawa que nous noterons $\log_p$, mais du simple point de vue de l'intégration p -adique, aucun choix ne semble vraiment meilleur qu'un autre. Nous allons donc considérer tous les choix possibles de logarithme simultanément en considérant $\operatorname{Log} p$ comme une variable et l'application Log comme une fonction localement analytique de K^* dans $K_{\text{st}} = K[\operatorname{Log} p]$. Remarquons que si on note $\mathcal{L}(K^*)$ le sous- $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel $K \oplus \mathbf{Q} \operatorname{Log} p$ de K_{st} , alors Log est à valeurs dans $\mathcal{L}(K^*)$.

Le miracle est que le fait de fixer la valeur de $\operatorname{Log} p$ suffit à assurer l'existence et l'unicité d'une intégration naturelle sur les variétés algébriques lisses définies sur un corps p -adique (toutes nos variétés sont par convention géométriquement connexes) et ce, bien que la topologie p -adique soit totalement discontinue. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soit K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. Il existe une et une seule manière de définir l'intégration des 1-formes différentielles fermées sur les variétés algébriques lisses définies sur K de telle sorte que :*

(i) *Si X est une variété algébrique lisse définie sur K , ω est une 1-forme différentielle fermée sur X et $a \in X(K)$, alors $F(x) = \int_a^x \omega$ est une fonction localement analytique de $x \in X(K)$ à valeurs dans K_{st} vérifiant $dF = \omega$.*

(ii) *Si X est une variété algébrique lisse définie sur K , ω est une 1-forme différentielle fermée sur X et a, b, c sont 3 éléments de $X(K)$, alors $\int_a^c \omega = \int_a^b \omega + \int_b^c \omega$ (relation de Chasles).*