L'action de l'algèbre de Hecke sur les groupes de composantes des jacobiennes des courbes modulaires est "Eisenstein".

Bas Edixhoven

le 19 mai 1988

1 Introduction.

Pour N un nombre entier positif soit $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$ la courbe modulaire sur $\mathbf{Q}$ paramétrant les N-isogénies cycliques entre courbes elliptiques, et $J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ sa jacobienne. L'algèbre de Hecke agit sur $J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ donc aussi sur son modèle de Néron $J_0(N)$ sur $\mathbf{Z}$. Soit p un nombre premier et $\Phi_{N,p}$ le groupe de composantes connexes de la fibre géometrique $J_0(N)_p$ de $J_0(N)$ en caractéristique p.

Dans cet article nous démontrons que pour $p > 3$ l'action de l'algèbre de Hecke sur $\Phi_{N,p}$ est "Eisenstein". Cela veut dire que pour tout nombre premier l ne divisant pas N l'opérateur de Hecke T_l agit sur $\Phi_{N,p}$ par multiplication par $l+1$ (cf. [Ma], p.95). Ce résultat est une généralisation d'un théorème de K. Ribet [Ri 1],[Ri 2](Theorem 2.24), qui prouve le même résultat en supposant que la valuation de N en p est au plus 1. À dire vrai, Ribet prouve son théorème aussi pour $p = 2, 3$. Parce que dans ce cas la méthode de Ribet est plus efficace nous nous restreindrons au cas $p > 3$.

Pour prouver son théorème Ribet utilise la description donnée par A. Grothendieck [Gro 1] des groupes $\Phi_{N,p}$ en termes de l'accouplement de monodromie sur le groupe de caractères de la partie torique de la réduction (semistable) de $J_0(N)$ sur $\mathbf{Z}_p$. En se servant des résultats de [De-Ra] sur la réduction de $X_0(N)$ modulo p il obtient une description combinatoire de $\Phi_{N,p}$ en termes de points supersinguliers en caractéristique p. Ce qui reste alors à démontrer est une proposition sur les automorphismes des courbes elliptiques supersingulières.

Comme la méthode de Ribet ne marche qu'en cas de réduction semistable nous nous servons de la description donnée par M. Raynaud [Ray] des groupes $\Phi_{N,p}$ en termes de modèles sur $\mathbf{Z}$ des $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$ qui sont réguliers. De tels modèles sont connus dans le cas où la valuation en p de N est au plus 1 [De-Ra], et dans le cas où $p > 3$ [Ed]. Pour l un nombre premier ne divisant pas N il faut montrer que l'opérateur de Hecke T_l agit sur $\Phi_{N,p}$ par multiplication par $l+1$. Cet opérateur T_l est défini en termes des deux morphismes standards de $X_0(Nl)_{\mathbf{Q}}$ vers $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$. Afin de calculer l'action de T_l sur $\Phi_{N,p}$ nous étendons ces deux morphismes à certains modèles convenables sur $\mathbf{Z}_p$. Ces calculs nous conduisent à démontrer la proposition (déjà prouvée par Ribet dans le cas supersingulier) mentionnée plus haut (cf. Lemme 2 de (4.2)).

L'intérêt de ce théorème de Ribet est le rôle qu'il joue dans [Ri 2], où il est démontré que la conjecture de Taniyama et Weil implique celle de Fermat. Il est peut-être utile de remarquer que dans la démonstration que Taniyama-Weil implique Fermat [Ri 2] on n'a besoin que d'une version faible du théorème de Ribet. Cette version dit que l'action de l'algèbre de Hecke sur le sous-groupe de q-torsion de $\Phi_{N,p}$ est Eisenstein pour tout nombre premier $q > 3$. D'après Mazur et Rapoport [Ma-Ra] ce sous-groupe est cyclique et on a un générateur explicite: c'est un multiple de $Z - Z'$ (dans leur notation). Il est très facile de calculer l'action d'un T_l sur $Z - Z'$. Bien sûr, il n'est pas utile d'affaiblir le théorème de Ribet quand il s'agit des conjectures de Serre.

Finissons par remarquer le fait que l'action de l'algèbre de Hecke sur les groupes de composantes des modèles de Néron des jacobiennes des courbes de Shimura n'est pas toujours "Eisenstein". Ceci est une conséquence du Théorème 4.3 de Ribet ([Ri 2], version d'octobre 1988).

J'aimerais remercier K. Ribet de m'avoir demandé si la généralisation de son théorème était vraie, de m'avoir envoyé une version préliminaire de son article [Ri 1], de m'avoir stimulé d'écrire ce texte, et de ses commentaires. J'aimerais aussi remercier J. Oesterlé de m'avoir suggéré beaucoup d'améliorations.

2 Description du groupe de composantes.

Soit S un trait strictement hensélien de point fermé s et de point générique t, et $\mathcal{C} \to S$ une courbe. Supposons que $\mathcal{C}$ est régulier et que $\mathcal{C}_t$ est lisse et géométriquement irréductible sur t. Nous allons rappeler la description que donne Raynaud ([Ray], (8.1)) du modèle de Néron de $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_t/t}$ en termes du foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$.

Notons par C les composantes irréductibles réduites de $\mathcal{C}_s$, et par m_C la multiplicité de C dans $\mathcal{C}_s$. Alors on a l'égalité de diviseurs (de Weil ou Cartier) sur $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}_s = \sum_C m_C C.$$

Pour ne pas avoir des ennuis nous supposons que $k(s)$ est algébriquement clos et que le plus grand commun diviseur des m_C est 1.

Soit $\mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}$ le sous-foncteur de $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$ des faisceaux inversibles de degré total 0. Rappelons ([De-Ra]I(3.3.3) ou [Ray](8.1.1)) que le degré total d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}_s$ est donné par:

$$\deg \mathcal{L} = \sum_C m_C \deg_C(\mathcal{L}\,|_C).$$

D'après théorème (8.1.4) de [Ray] le modèle de Néron de $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_t/k(t)}$ est égal à $\mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}/E$, où E est l'adhérence schématique de la section unité dans $\mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}$. Ce faisceau en groupes E mesure le défaut de séparation de $\mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}$ sur S. Puisque $\mathcal{C}/S$ satisfait la propriété $(\mathrm{N})^*$ ([Ray](6.1.4),(6.1.6)), $\mathcal{C}/S$ est cohomologiquement plat ([Ray](7.2.1)) et E est représenté par un schéma en groupes étale sur S ([Ray](5.2)). Ce schéma en groupes est "le schéma étalé sur S" correspondant au faisceau gratte-ciel de support s et de groupe $E(S)$. Le groupe $E(S)$ est formé des faisceaux inversibles sur $\mathcal{C}$ qui sont triviaux sur $\mathcal{C}_t$. Soit D le groupe abélien libre qui a pour base les composantes irréductibles C de $\mathcal{C}_s$, on a donc:

$$D = \bigoplus_C \mathbf{Z}[C].$$

Alors $E(S)$ est l'image du morphisme:

$$D \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}(S) \qquad [C] \mapsto \mathcal{L}_C,$$

où $\mathcal{L}_C$ est l'inverse du faisceau d'idéaux sur $\mathcal{C}$ définissant le diviseur C. Comme $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/S}$ est la composante neutre du modèle de Néron de $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_t/t}$ ([Ray](8.1.2)) on a:

$$\Phi = \mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}(s)/(E(s) + \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/S}(s)) = \mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}(S)/(E(S) + \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/S}(S)),$$

où Φ est le groupe de composantes de la fibre sur s de ce modèle de Néron. Définissons un morphisme: $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}(S) \xrightarrow{\text{multideg}} D$ par: $\mathcal{L} \mapsto \sum_C \deg(\mathcal{L}\mid_C)[C]$. Maintenant nous avons un diagramme où la ligne est exacte:

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[d, "\mathrm{div}"] \arrow[dr, "\alpha"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/S}(S)) \arrow[r] & \mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}(S) \arrow[r, "\text{multideg}"] & D \arrow[r, "\deg"] & \mathbf{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\alpha = \text{multideg} \circ \mathrm{div}$ se calcule par:

$$\alpha: \quad [C] \mapsto \sum_{C'} \deg(\mathcal{L}_C \mid_{C'})[C'] = \sum_{C'} (C \cdot C')[C'],$$

où $(C \cdot C')$ est le nombre d'intersection de C et C' sur la surface régulière $\mathcal{C}$. De ce qui précède il s'ensuit que ([Ray](8.1.2)):

$$\Phi = \ker(\deg)/\mathrm{im}(\alpha).$$

Un élément de Φ est donc une classe modulo $\mathrm{im}(\alpha)$ de multidegrés de faisceaux inversibles sur $\mathcal{C}$.

3 Le groupe de composantes et morphismes.

Les notations sont celles de la Section 2. Soit $\tilde{\mathcal{C}}/S$ une courbe satisfaisant aux hypothèses faites sur $\mathcal{C}$, et $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ un S-morphisme. Nous allons calculer les deux morphismes induits par π sur les groupes de composantes: $\Phi \xrightarrow{\pi^*} \tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi} \xrightarrow{\pi_*} \Phi$.

3.1 Calcul de π^*.

D'après (2), le groupe Φ est l'homologie du complexe: $D \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\deg} \mathbf{Z}$. On a un complexe analogue pour $\tilde{\Phi}$. Tenant compte des deux interprétations de D (groupe de diviseurs sur $\mathcal{C}$ à support dans $\mathcal{C}_s$ et groupe de multidegrés de faisceaux inversibles sur $\mathcal{C}$), on voit facilement que le morphisme $\pi^*: \Phi \to \tilde{\Phi}$ est induit par un morphisme de complexes:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi^*_{\mathrm{div}}"] & D \arrow[r, "\deg"] \arrow[d, "\pi^*_{\deg}"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "\deg(\pi)"] \\
\tilde{D} \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & \tilde{D} \arrow[r, "\deg"] & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

$$\pi^*_{\mathrm{div}}: \quad [C] \mapsto \pi^{-1}C \quad (\text{diviseur sur } \tilde{\mathcal{C}})$$

$$\pi^*_{\deg}: \quad [C] \mapsto \sum_{\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C} \deg(\pi|_{\tilde{C}})[\tilde{C}].$$

3.2 Calcul de π_*.

Les notations sont toujours les mêmes, mais dans cette section il nous faut une hypothèse supplémentaire: $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ est quasi-fini. Parce que $\tilde{\mathcal{C}}/S$ et $\mathcal{C}/S$ sont propres, π est alors fini, et parce que $\tilde{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}$ sont réguliers, π est plat. Le morphisme π est donc fini et plat, ce qui reste vrai après tout changement de base. La construction "norme d'un faisceau inversible" nous donne un morphisme: $\mathrm{Pic}_{\tilde{\mathcal{C}}/S} \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$. En termes de diviseurs ce morphisme est l'image directe.

En regardant les valuations que donnent les composantes irréductibles des fibres fermées on trouve l'égalité de diviseurs sur $\tilde{\mathcal{C}}$:

$$\pi^{-1}C = \sum_{\tilde{C} \mapsto C} (m_{\tilde{C}}/m_C)\tilde{C}.$$

Localisation au point générique d'un C nous donne:

$$\deg(\pi) = \sum_{\tilde{C} \mapsto C} (m_{\tilde{C}}/m_C)\deg(\tilde{C}/C).$$

Pour l'image directe d'un $\tilde{C}$ on a par définition ([Gro 2] (21.10.14.1)): $\pi_*(\tilde{C}) = \deg(\tilde{C}/\pi\tilde{C})\pi\tilde{C}$. Pour voir ce qui arrive aux multidegrés appliquons le corollaire (7.1.2) de [Ray], ce corollaire dit que pour chaque $\tilde{C}$ il existe un diviseur effectif horizontal Z sur $\tilde{\mathcal{C}}$ qui a degré 1 sur $\tilde{C}$ et degré 0 sur les autres composantes de $\tilde{\mathcal{C}}_s$. Le degré de π_*Z sur $\pi\tilde{C}$ se calcule par la formule de projection: $(\pi_*Z \cdot \pi\tilde{C}) = (Z \cdot \pi^*\pi\tilde{C}) = (Z \cdot (m_{\tilde{C}}/m_{\pi\tilde{C}})\tilde{C}) = m_{\tilde{C}}/m_{\pi\tilde{C}}$. Maintenant nous savons tout du morphisme de complexes qui induit π_* sur les groupes de composantes:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{Z} & \longrightarrow & \tilde{D} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{D} & \xrightarrow{\deg} & \mathbf{Z} \\
\downarrow \scriptstyle{\deg(\pi)} & & \downarrow \scriptstyle{\pi_*^{\mathrm{div}}} & & \downarrow \scriptstyle{\pi_*^{\deg}} & & \downarrow \scriptstyle{1} \\
\mathbf{Z} & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\alpha} & D & \xrightarrow{\deg} & \mathbf{Z}
\end{array}$$

$$\pi_*^{\mathrm{div}}: \quad [\tilde{C}] \mapsto \deg(\tilde{C}/\pi\tilde{C})[\pi\tilde{C}]$$
$$\pi_*^{\deg}: \quad [\tilde{C}] \mapsto (m_{\tilde{C}}/m_{\pi\tilde{C}})[\pi\tilde{C}].$$

Remarque. Comme l'a suggéré J. Oesterlé, on peut calculer le morphisme induit par π sur les groupes de composantes sans supposer que π est quasi-fini. Le morphisme $\pi : \tilde{\Phi} \to \Phi$ est alors induit par un morphisme de complexes commme ci-dessus, où $\pi_*^{\deg}$ est donné par la formule:

$$\pi_*^{\deg}: \quad [\tilde{C}] \mapsto \sum_{\tilde{C} \subset \pi^{-1}C} m_{\tilde{C},C}[C]$$

avec $m_{\tilde{C},C}$ la multiplicité de $\tilde{C}$ dans $\pi^{-1}C$. La formule pour π_*^{div} est toujours la même.

3.3 Éclatements.

Il peut être nécessaire de travailler avec des modèles non minimaux, par exemple pour avoir des morphismes entre modèles réguliers. Bien sûr, le groupe de composantes ne dépend pas du modèle (régulier) qu'on choisit, mais c'est sa description qui change quand on change de modèle. Nous avons donc besoin de traduire une description en une autre. Soit alors $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ obtenu en faisant éclater $\mathcal{C}$ en un point $x \in \mathcal{C}(s)$. Nous notons E la courbe exceptionnelle et $\tilde{C}$ le transformé strict d'une composante irréductible C de $\mathcal{C}_s$.

Dans ce cas on a: $\pi^*_{\text{deg}}: \quad [C] \mapsto [\tilde{C}]$. Cette formule donne l'isomorphisme: $\Phi \xrightarrow{\pi^*} \tilde{\Phi}$, nous voulons aussi une formule pour son inverse. Pour cela il faut éliminer les $[E]$ d'un élément de $\tilde{\Phi}$. La relation voulue nous est fournie par $\tilde{\alpha}([E])$:

$$\tilde{\alpha}([E]) = -[E] + \sum_{x \in C(s)} m_{C,x}[\tilde{C}]$$

où $m_{C,x}$ est la multiplicité de C en x. L'isomorphisme $\tilde{\Phi} \to \Phi$ est donc induit par:

$$(\pi^*_{\text{deg}})^{-1} : \tilde{D} \to D \qquad [\tilde{C}] \mapsto [C] \quad [E] \mapsto \sum_{x \in C(s)} m_{C,x}[C].$$

4 Le cas des courbes modulaires $X_0(N)$.

Pour N un entier positif soit $X_0(N)$ la courbe modulaire sur $\mathbf{Z}$ paramétrant les N-isogénies cycliques entre courbes elliptiques: $X_0(N)$ est le schéma grossier de modules compactifié associé au problème de modules $[\Gamma_0(N)]$ (cf. [Ka-Ma](8.6)). Cette courbe $X_0(N)/\mathbf{Z}$ est un modèle normal de sa fibre générique $X_0(N)_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, mais malheureusement ce n'est pas toujours un modèle régulier. Notons par $J_0(N)$ le modèle de Néron sur $\mathbf{Z}$ de $\mathrm{Pic}^0_{X_0(N)_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$. Soit p un nombre premier, S le spectre de l'anneau des vecteurs de Witt sur $\overline{\mathbf{F}_p}$ et $\widetilde{X_0(N)}_S$ la résolution minimale de $X_0(N)_S$. Deligne et Rapoport [De-Ra] ont donné une description de $\widetilde{X_0(N)}_S$ dans le cas où la valuation de N en p est au plus 1. Utilisant les résultats de Katz et Mazur [Ka-Ma] on peut décrire $\widetilde{X_0(N)}_S$ pour $p > 3$ [Ed]. Dans ces deux cas on connaît donc la table d'intersection de la fibre spéciale de $\widetilde{X_0(N)}_S$, et d'après la Section 2 cela suffit pour calculer le groupe de composantes $\Phi_{N,p}$ de $J_0(N)_s$. Nous donnerons quelques exemples de ces groupes en (4.4).

4.1 Action de l'algèbre de Hecke sur $\Phi_{N,p}$.

Soit l un nombre premier ne divisant pas N. Pour une isogénie cyclique de degré Nl entre courbes elliptiques (sur une base quelconque): $E_1 \xrightarrow{\phi_{Nl}} E_2$ il existe des factorisations uniques (à isomorphisme près):

$$E_1 \xrightarrow{\phi_{N,1}} E_3 \xrightarrow{\phi_{l,2}} E_2 \qquad E_1 \xrightarrow{\phi_{l,1}} E_4 \xrightarrow{\phi_{N,2}} E_2$$

où $\phi_{*,i}$ a degré $*$ (cf. [Ka-Ma] (6.7)).

Au niveau de problèmes de modules cela donne deux morphismes:

$$\mathrm{S}, \mathrm{T} : [\Gamma_0(Nl)] \to [\Gamma_0(N)] : \quad \mathrm{S}(\phi_{Nl}) = \phi_{N,1} \quad \mathrm{T}(\phi_{Nl}) = \phi_{N,2},$$

et une involution:

$$\mathrm{W}_l : [\Gamma_0(Nl)] \to [\Gamma_0(Nl)] \quad \phi_{Nl} \mapsto \phi_{N,1}\phi^t_{l,1}.$$

Par construction on a: $\mathrm{T} = \mathrm{S} \circ \mathrm{W}_l$. On obtient des morphismes induits: $\mathrm{S}, \mathrm{T} : X_0(Nl) \to X_0(N)$, $X_0(Nl)_{\mathbf{Q}} \to X_0(N)_{\mathbf{Q}}$, un endomorphisme $\mathrm{T}_l = \mathrm{T}_* \mathrm{S}^*$ de $J_0(N)$, et finalement un endomorphisme T_l de $\Phi_{N,p}$. Le fait que S, T et W_l se prolongent aux pointes est démontré dans [De-Ra] Ch. IV Prop. 3.16, 3.18, Prop. 3.19 et ex. 4.4.

Théorème 1 *L'endomorphisme T_l de $\Phi_{N,p}$ est multiplication par $l+1$ si $p > 3$.*