MÉMOIRES DE LA S. M. F.

DANIEL PERRIN

Courbes passant par m points généraux de P^3

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 28-29 (1987)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1987_2_28-29__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 28/29
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 115, 1987, fascicule 3

Table des matières

0037-9484/87 03/1-138 $ 15.80

INTRODUCTION

1 LE PROBLÈME INITIAL :

Le problème qui est à l'origine de ce travail est le suivant :

Etant donnés m points $x_1,\dots,x_m$ de $\mathbb{P}^3$, en position générale, trouver une courbe C, lisse et connexe, contenant $x_1,\dots,x_m$, de degré le plus petit possible.
L'expression "en position générale" est à prendre au sens suivant :

Il existe un ouvert de Zariski U, non vide, donc dense, de $(\mathbb{P}^3)^m$ tel que, si $(x_1,\dots,x_m)\in U$, une courbe convenable passe par les x_i.

Par exemple, par deux points généraux (i.e. distincts) de $\mathbb{P}^3$ passe une droite (et une seule), mais pas par trois points généraux (les triplets de points alignés forment un fermé de $(\mathbb{P}^3)^3$).
De même, par trois points généraux passe une conique propre (non unique), mais pas par quatre (quatre points généraux de $\mathbb{P}^3$ ne sont pas coplanaires).

La réponse au problème analogue pour les courbes planes est bien connue : par $d(d+3)/2$ points généraux de $\mathbb{P}^2$ passe une courbe lisse de degré d. Il suffit, pour le voir, de résoudre les équations linéaires imposées par les points aux coefficients du polynôme homogène $F(X,Y,T)$ qui définit C (cf. [9]).Avec des conditions de position générale plus fines le problème peut cependant être plus difficile (cf.[34]).

De même, dans $\mathbb{P}^3$, on sait résoudre la question analogue pour les surfaces :

par $\binom{s+3}{3} - 1$ points généraux passe une surface de degré s.

Pour les courbes, en revanche, le problème, bien que tout aussi naturel, est plus délicat (sauf pour les intersections complètes, où on se ramène aisément au cas des surfaces) et peu de résultats semblent connus à ce jour (cf. cependant [3], [18] p.37 ou [36] p. 203). Par exemple, il n'est pas évident de savoir par combien de points généraux (au plus) on peut faire passer une courbe de degré $s^2 - 1$, liée à une droite par deux surfaces de degré s. Cet exemple est d'ailleurs un bon fil conducteur pour parcourir ce travail.

Pour traduire le problème ci-dessus, on pose:

$d(m) = \inf \{d\in \mathbb{N}^*$ tels que par m points généraux de $\mathbb{P}^3$ passe une courbe lisse et connexe de degré d $\}$

Texte reçu le 4 septembre 1986, révisé le 15 juillet 1987.
D.PERRIN, Ecole Normale Supérieure, Département de Mathématiques, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France.

mais, en fait, il est plus commode de calculer :

$m(d)$ = nombre maximum de points généraux de $\mathbb{P}^3$ par lesquels on peut faire passer une courbe de degré d (pour une définition plus formelle cf.2.a, déf.2.0).

Les deux quantités ci-dessus sont liées par les formules :

$d(m) = \inf \{ d \mid m(d) \geq m \}$; $m(d) = \sup\{ m \mid d(m) \leq d \}$ de sorte qu'il suffit d'étudier $m(d)$.

La plupart du temps il sera nécessaire d'imposer non seulement le degré, mais aussi le genre des courbes. On introduit donc :

$m(d,g)$ = nombre maximum de points généraux de $\mathbb{P}^3$ par lesquels on peut faire passer une courbe de degré d et genre g ; cf.2.a.

Bien entendu, on a : $m(d) = \sup m(d,g)$ pour $g \geq 0$.

2 MÉTHODE D'ATTAQUE DU PROBLÈME INITIAL ; APPARITION DE NOUVEAUX PROBLÈMES.

a) Traduction en termes de schémas de Hilbert ; majoration de $m(d,g)$:

Désignons par H_m le schéma de Hilbert qui paramètre les sous-schémas finis de longueur m, $M = \{x_1,\ldots,x_m\}$ de $\mathbb{P}^3$; par $H_{d,g}$ le schéma de Hilbert des courbes lisses et connexes de degré d et genre g de $\mathbb{P}^3$; par $D_{m;d,g}$ enfin le schéma des drapeaux (ou schéma d'incidence ou schéma de Hilbert relatif) qui paramètre les couples (M,C) avec $M \in H_m$, $C \in H_{d,g}$ et $C \supset M$.
Alors, si $f_m : D_{m;d,g} \to H_m$ est la projection naturelle (qui à (M,C) associe M), $m(d,g)$ est le plus grand entier m tel que l'image de f_m contienne un ouvert dense de H_m.
Cette interprétation conduit aussitôt à la majoration fondamentale suivante :

(2.1) $\quad m(d,g) \leq [1/2 \dim H_{d,g}]$ (où le crochet désigne la partie entière)

En général il n'y a pas égalité. Par exemple, si $g = (d-1)(d-2)/2$, les courbes de $H_{d,g}$ sont planes, et donc on a : $m(d,g) \leq 3 < 1/2 \dim H_{d,g}$ dès que $d \geq 2$. Plus généralement, on a la majoration suivante :

(2.2) Si toute courbe de $H_{d,g}$ est tracée sur une surface de degré s, on a :

$$m(d,g) \leq \binom{s+3}{3} - 1 .$$

Ainsi, pour $d = 5$, $g = 2$, on a $m(d,g) \leq 9$, alors que $1/2 \dim H_{d,g} = 10$.

Cependant, et c'est l'une des idées directrices de ce travail, on peut penser que l'inégalité (2.2) est l'obstruction essentielle qui empêche $m(d,g)$ d'être égal à $[1/2 \dim H_{d,g}]$.

b)Calcul différentiel ; minoration de $m(d,g)$:

Pour voir que l'image de la flèche f_m définie ci-dessus contient un ouvert dense de H_m, il suffit de montrer qu'elle est lisse. On aborde ce problème par une technique de calcul différentiel (au sens de Zariski-Grothendieck bien sûr) en déterminant les espaces tangents à H_m, $H_{d,g}$ et $D_{m;d,g}$.

On sait que l'espace tangent à H_m en M (resp. à $H_{d,g}$ en C) est égal à $H^o(M,N_M)$ (resp. à $H^o(C, N_C)$) où N_M (resp. N_C) est le fibré normal à M (resp. C) dans $\mathbb{P}^3$. L'étude de l'espace tangent à $D_{m;d,g}$ en (M,C) conduit au théorème suivant :

(2.4) Si $H_{d,g}$ est lisse, on a : $m(d,g) = \sup m(N_C)$ pour $C \in H_{d,g}$; où $m(N_C)$ est l'invariant du fibré normal défini par :

$m(N_C) = \sup \{ m \in \mathbb{N}$ tel que : il existe un diviseur positif M sur C, de degré m, tel que la flèche naturelle de restriction :

$$r : H^o(C, N_C) \rightarrow H^o(M, N_C|_M) \text{ soit surjective } \}$$

Ce théorème ramène essentiellement le problème initial à une question sur le fibré normal des courbes de $\mathbb{P}^3$: le calcul de $m(N_C)$.

On notera que l'hypothèse de lissité de $H_{d,g}$ n'est pas toujours réalisée (cf. les "pathologies" étudiées dans [38] ou [32]). Dans ce cas, on ne sait pas calculer $m(d,g)$. Cependant, on dispose de suffisamment de critères de lissité ($h^1N_C = 0$; courbes projectivement normales ...) pour traiter les cas qui nous intéressent.

c) Premiers résultats concernant N_C :

On note déja que l'on a :

$$m(N_C) \leq 1/2\, h^oN_C$$

(si $H_{d,g}$ est lisse en C, on a : $h^oN_C = \dim H_{d,g}$ et on comparera à 2.1).
L'objectif est donc d'atteindre, si possible, cette borne.
On commence par étudier deux cas particuliers.

1) Lorsque le fibré normal est décomposé (i.e. $N_C = D \oplus E$, avec D,E inversibles), on a : $m(N_C) = \inf(h^oD, h^oE)$. C'est le cas si C est intersection complète, ou rationnelle, mais on sait (cf.[11]) que c'est loin d'être le cas général. On obtient ainsi les minorations :

$m(s^2) \geq \binom{s+3}{3} - 2$ et $m(d,0) \geq 2d$ pour $d \neq 2$.

2) Lorsque N_C vérifie la condition $h^oN_C(-2) = 0$ le diviseur M égal au double de la section plane convient dans la définition de $m(N_C)$. On a donc $m(N_C) = 2d = 1/2\ h^oN_C$. On peut alors appliquer le résultat suivant dû à Ellingsrud et Hirschowitz [7] :

(5.11) Soit $D_P(g)$ le plus petit entier d tel qu'il existe une courbe lisse et connexe C de degré d et genre g vérifiant $h^oN_C(-2) = 0$. Si $d \geq D_P(g)$, on a : $m(d,g) \geq 2d$.

On peut aussi, en utilisant la fonction $D_P(g)$, obtenir une variante de la question initiale où on impose aux points d'être sur une surface fixée :

(5.12) Soit Q une surface intègre de $\mathbf{P}^3$, de degré $s \geq 2$. Si $d \geq D_P(g)$ et si $x_1,...,x_{2d}$ sont 2d points généraux de Q, il existe une courbe C, lisse et connexe, de degré d et genre g, coupant transversalement Q, et passant par $x_1,...x_{2d}$.

Ce type de résultats semble être très utile pour aborder les problèmes de "rang maximum", cf. Ballico et Ellia [2]. Un de nos objectifs, qui mérite d'être poursuivi indépendamment du problème initial, est donc désormais le calcul de $D_P(g)$.

d) La méthode de l'extension :

Lorsque l'on n'est pas dans l'un des cas favorables ci-dessus : N_C décomposé ou $h^oN_C(-2) = 0$ (par exemple pour les courbes de degré s^2-1 liées aux droites), on utilise une écriture de N_C comme extension de faisceaux inversibles :

$$0 \to D \to N_C \to E \to 0$$

le plus souvent en plongeant C dans une surface lisse Q de degré s, auquel cas on a :

$D = N_{C/Q} \simeq \omega_C(4-s)$ et $E = N_Q \mid_C \simeq O_C(s)$.

On a alors le résultat suivant :

(3.7) $$\inf(h^oD\ ;\ h^oN_C - h^oD) \leq m(N_C) \leq 1/2\ h^oN_C$$

Cette inégalité donne $m(N_C) = h^oN_C - h^oD$ lorsque $h^oD \geq 1/2\ h^oN_C$; on obtient ainsi les "mauvais cas" i.e. ceux où $m(N_C) < 1/2\ h^oN_C$. Par exemple, si C est une courbe liée à une courbe plane de degré r par des surfaces de degrés s et t avec : $r < s < t$, on obtient :

(5.25. A_1) Si $r = 1$, $m(N_C) = \binom{s+3}{3} - s + 2$.

(5.25.A_2) Si $1 < r < s$, $m(N_C) = \binom{s+3}{3} - rs + r^2 + 2$

On obtient aussi quelques résultats positifs lorsque $h^oD = 1/2\, h^oN_C$, ainsi, si C est une courbe de degré 11 et genre 12 tracée sur une surface cubique lisse, on a $m(N_C) = 22$ ...(cf. 5.25 B). Mais, en général, si $h^oD < 1/2\, h^oN_C$, (3.7) donne seulement un encadrement de $m(N_C)$. Par exemple, si C est une courbe de degré $s^2 - 1$ liée à une droite par deux surfaces de degré s, on a

(5.25 C_1) $\quad 1/2\, h^oN_C - 2 \leq m(N_C) \leq 1/2\, h^oN_C = (s^3 + 6s^2 + 5s)/6$.

e) h^o-stabilité :

Les résultats précédents, s'ils ne permettent pas de conclure dans tous les cas, amènent cependant à introduire la notion de h^o-stabilité du fibré normal (ou, plus généralement, d'un fibré N de rang 2) qui va permettre le calcul de $m(N_C)$:

(3.11) N est dit h^o-semi-stable si et seulement si, pour tout sous-faisceau inversible L de N on a $h^oL \leq 1/2\, h^oN$.

C'est une condition analogue à la semi-stabilité ordinaire, mais où les sections globales remplacent les degrés. D'ailleurs, pour g assez petit ($g \leq 2d$ dans le cas du fibré normal), les deux notions coïncident, mais ce n'est pas le cas en général. On a alors le théorème suivant (pour h^oN_C pair) :

(3.14) $\quad m(N_C) = 1/2\, h^oN_C \Leftrightarrow N_C$ est h^o- semi-stable

Ce théorème, joint à l'inégalité (3.7), règle, au moins en théorie, le problème du calcul de $m(N_C)$. Encore faut-il disposer de critères de h^o-stabilité. Lorsque $g \leq 2d$, on peut utiliser certains résultats récents concernant la stabilité ordinaire : [4], [1], [47], [7] ...On obtient, par exemple, $m(N_C) = 1/2\, h^oN_C$ lorsque C est une courbe assez générale de degré 6 et genre 2 ou de degré 7 et genre 5, ou encore de degré 9 et genre 9 ...
L'irruption de la notion de h^o-stabilité dans notre problème va nous amener à nous intéresser à la notion, voisine, de stabilité du fibré normal. Cette tentative s'inscrit dans un courant de recherches très actuel (cf. [1], [4], [5], [7], [40], [47] ...) et la question des courbes et des points lui fournit une motivation supplémentaire. Comme dans le cas de l'étude de $D_P(g)$ évoquée ci-dessus, elle est largement indépendante (au moins pour ce qui concerne la stabilité) du problème initial.

f) un critère de stabilité et de h^o-stabilité :

Lorsque la courbe C est tracée sur une surface Q lisse, de degré s, le fibré normal $N_{C/Q}$ isomorphe à $\omega_C(4 - s)$ est un sous-faisceau inversible de N_C. Une condition nécessaire de semi-stabilité (resp. de h^o-stabilité) de N_C est donc :

(a) $\deg.\, \omega_C(4 - s) \leq 1/2 \deg.\, N_C$ $\quad$ (resp. (c) $h^o\omega_C(4 - s) \leq 1/2\, h^oN_C$)

On obtient une condition suffisante en lui adjoignant une hypothèse supplémentaire mettant en jeu,