

ASTÉRIQUE 251

**NOMBRE ET RÉPARTITION
DE POINTS DE HAUTEUR BORNÉE**

édité par

Emmanuel Peyre

Société Mathématique de France 1998

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

E. Peyre

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et
C.N.R.S., 7 rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France.

E-mail : `peyre@irma.u-strasbg.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — Primaire 11G35; secondaires 14G05, 11E76, 14M25, 14G10.

Mots clefs. — Point rationnel, hauteur, surface cubique, variété torique, mesure de Tamagawa.

NOMBRE ET RÉPARTITION DE POINTS DE HAUTEUR BORNÉE

édité par Emmanuel Peyre

Résumé. — Si les points rationnels d'une variété définie sur un corps de nombres sont denses pour la topologie de Zariski, il est naturel de munir cette variété de hauteurs qui, du point de vue de la géométrie d'Arakelov, s'interprètent comme degrés d'intersection avec des fibrés en droites munis de métriques. L'objectif est alors d'étudier de manière asymptotique l'ensemble des points dont la hauteur est inférieure à un nombre réel donné, et cela en des termes aussi géométriques que possible.

Ce volume est issu de deux séminaires qui ont eu lieu en avril et en mai 1996. Il contient des articles de Slater et Swinnerton-Dyer, de Heath-Brown, de Fouvry et de la Bretèche centrés sur le cas des surfaces cubiques, un texte de Billard sur les modèles minimaux des surfaces rationnelles, ainsi que des contributions de Salberger, de Peyre et de Batyrev et Tschinkel dont le principal objet est l'interprétation du terme dominant dans l'étude asymptotique du nombre de points de hauteur bornée.

Abstract (Number and distribution of points of bounded height)

If the rational points of a variety over a number field are Zariski dense, then it is natural to equip this variety with heights, which one can interpret as intersection degrees relative to metrized line bundles. The aim is to study the set of points of bounded height asymptotically and to relate the results to the geometry of the variety.

This volume is the outcome of two seminars held in Paris in April and May 1996. It contains articles by Slater and Swinnerton-Dyer, Heath-Brown, Fouvry, and de la Bretèche on cubic surfaces, a text by Billard on minimal models of rational surfaces and contributions of Batyrev and Tschinkel, Salberger, and Peyre on the conjectural interpretation of the dominant term in the asymptotic behaviour of the number of points with bounded height.

PRÉFACE

Si les points rationnels d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres sont denses pour la topologie de Zariski, il est naturel de munir cette variété de hauteurs qui, du point de vue de la géométrie d'Arakelov, s'interprètent comme degré d'intersection avec un fibré en droites muni de métriques. Il s'agit donc de fonctions définies sur l'ensemble des points rationnels à valeurs réelles strictement positives. L'objectif est alors d'étudier de manière asymptotique l'ensemble des points dont la hauteur est inférieure à un nombre réel donné, et cela en des termes aussi géométriques que possible. Cette étude a connu ces dernières années un regain important dont Manin a été un des principaux instigateurs. Ce renouveau a en particulier porté sur une meilleure compréhension du terme dominant dans le nombre de points de hauteur bornée. Ceci passe par une prise en compte des problèmes de répartition tels que l'existence de fermés accumulateurs susceptibles d'occulter le reste de la variété dans l'étude asymptotique.

Ce volume est issu de deux séminaires qui ont eu lieu en avril et en mai 1996 et où furent présentés divers développements récents de ce domaine.

Une des richesses de cette théorie est la variété des points de vue et des méthodes mises en œuvre. Nous avons tenté d'en donner une palette aussi large que possible. Le cas des surfaces cubiques est particulièrement révélateur à cet égard ; en effet il apparaît dans la plupart des textes présentés ici, mais avec un regard à chaque fois différent.

Les premiers articles leur sont entièrement consacrés : Slater et Swinnerton-Dyer donnent une minoration du nombre des points de hauteur bornée sur le complémentaire des 27 droites pour une vaste classe de surfaces cubiques, tandis que Heath-Brown en présente une majoration. Les deux textes suivants étudient de manière fine

le cas particulier de la surface cubique singulière d'équation

$$X_1X_2X_3 = T^3,$$

mais avec des procédés de théorie analytique des nombres « élémentaire » dans celui de Fouvry et d'analyse complexe dans celui de la Bretèche. Cet exemple qui a fait l'objet de plusieurs discussions informelles lors des rencontres de 1996 apparaît également dans les textes de Salberger et de Batyrev et Tschinkel. La contribution de Billard porte sur la conjecture de Batyrev et Manin pour les modèles minimaux des surfaces rationnelles. Les trois derniers articles mettent plutôt l'accent sur l'interprétation conjecturale du terme dominant dans l'estimation asymptotique. Salberger exprime la constante apparaissant dans ce terme à l'aide des torseurs universels. Cette approche lui permet en outre de redémontrer un résultat de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques projectives, lisses et déployées. Ce relèvement aux torseurs universels est également l'objet du texte qui le suit. Batyrev et Tschinkel quant à eux considèrent ces interprétations conjecturales à la lumière de travaux récents de Fujita concernant le programme des modèles minimaux pour les variétés algébriques polarisées. Ils développent également une généralisation de la notion de nombre de Tamagawa associé à une hauteur.

Nous tenons à remercier les organisateurs du séminaire sur les variétés rationnelles, le responsable des lundis arithmétiques ainsi que le réseau européen sur les formes automorphes pour les séminaires à l'origine de ce livre.

Emmanuel Peyre

TABLE DES MATIÈRES

Préface	1
Résumés des articles	7
Abstracts	11
 JOHN B. SLATER & SIR PETER SWINNERTON-DYER — <i>Counting points on cubic surfaces, I</i>	1
 ROGER HEATH-BROWN — <i>Counting Rational Points on Cubic Surfaces</i>	13
1. Introduction	13
2. Proof of Theorem 2	16
3. The proof of Lemma 2	19
4. Proof of Theorem 3	22
5. Deduction of Theorem 1	25
6. Bounds for the rank of elliptic curves	28
7. Acknowledgement	30
References	30
 ETIENNE FOUVRY — <i>Sur la hauteur des points d'une certaine surface cubique singulière</i>	31
1. Introduction	31
2. Transformations de $V^+(X)$	33
3. Étude de $\mathcal{K}(X)$	38
4. Minoration de $\mathcal{K}(X)$	39
5. Majoration de $\mathcal{K}(X)$	45
6. Fin de la démonstration du théorème.	47
Références	49

RÉGIS DE LA BRETÈCHE — <i>Sur le nombre de points de hauteur bornée d'une certaine surface cubique singulière</i>	51
1. Introduction	51
1.1. Énoncé des résultats	51
1.2. Origine du problème en géométrie algébrique	52
1.3. Énoncé du problème en terme de variété torique	53
1.4. Présentation arithmétique du problème	54
2. Démonstration des résultats	55
2.1. Préliminaires	55
2.2. Application de la formule de Perron	58
3. Application du théorème des résidus	60
3.1. Préliminaires	60
3.2. Étude de $F(s_1, s_2, s_3)$	61
3.3. Première application du théorème des résidus	62
3.4. Estimation de $M_1(X_1, X_2, X_3)$	65
3.5. Estimation de $M_2(X_1, X_2, X_3)$	72
3.6. Estimation de $M_3(X_1, X_2, X_3)$	75
3.7. Estimation de $M_4(X_1, X_2, X_3)$	75
3.8. Estimation de $M_5(X_1, X_2, X_3)$	76
Références	76
 HERVÉ BILLARD — <i>Répartition des points rationnels des surfaces géométriquement réglées rationnelles</i>	79
1. Introduction	79
2. Géométrie des surfaces de Hirzebruch	80
3. Répartition des points rationnels des surfaces de Hirzebruch	83
Références	89
 PER SALBERGER — <i>Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties</i>	91
Introduction	91
1. Analytic manifolds over locally compact fields	96
2. Measures and densities for algebraic varieties over local fields	108
3. Invariant norms on torsors over local fields	122
4. Adelic norms and measures	135
5. Torsors over global fields and Tamagawa measures	157
6. Reciprocity conditions and Tamagawa numbers	173
7. Counting functions of Fano varieties	181

8. Torsors over toric varieties	187
9. Norms on toric varieties over local fields	196
10. Toric height functions and Tamagawa volumes of universal torsors	207
11. Asymptotic formulas for counting functions on toric $\mathbb{Q}$ -varieties	229
References	255

EMMANUEL PEYRE — <i>Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et</i> <i>torseurs universels</i>	259
1. Introduction	259
2. Le terme principal de la fonction zêta des hauteurs	261
2.1. Notations	261
2.2. Hauteurs	261
2.3. Mesures de Tamagawa	262
2.4. Notions de répartition	264
2.5. Fonction zêta des hauteurs	266
2.6. Une question optimiste	267
3. Rappels sur les toreseurs universels	268
3.1. Les tores	268
3.2. Cônes et structures associées	271
3.3. Torseurs universels	273
4. Montée aux toreseurs universels	275
4.1. Les hauteurs	275
4.2. Un espace de type adélique	276
4.3. Un domaine fondamental sous $\mathrm{NS}(\mathcal{O}_S)$	283
4.4. Mesures sur les toreseurs universels	284
5. Deux résultats de descente	288
5.1. Une fonction de comptage	288
5.2. La descente pour la fonction zêta des hauteurs	289
5.3. La descente pour l'analogie intégral	291
5.4. Conclusion	293
Références	296

VICTOR V. BATYREV & YURI TSCHINKEL — <i>Tamagawa numbers of polarized</i> <i>algebraic varieties</i>	299
1. Introduction	299
2. Geometry of $\mathcal{L}$ -polarized varieties	303
2.1. $\mathcal{L}$ -closure	303
2.2. Kodaira energy and $\alpha_{\mathcal{L}}(V)$	305

2.3. $\mathcal{L}$ -primitive varieties	308
2.4. $\mathcal{L}$ -primitive fibrations and descent of metrics	312
3. Heights and asymptotic formulas	314
3.1. Basic terminology and notations	314
3.2. Weakly and strongly $\mathcal{L}$ -saturated varieties	315
3.3. Adelic $\mathcal{L}$ -measure and $\tau_{\mathcal{L}}(V)$	319
3.4. Main strategy	323
3.5. $\mathcal{L}$ -primitive fibrations and $\tau_{\mathcal{L}}(V)$	325
4. Height zeta-functions	327
4.1. Tauberian theorem	327
4.2. Products	327
4.3. Symmetric product of a curve	328
4.4. Homogeneous spaces G/P	330
4.5. Toric varieties	332
5. Singular Fano varieties	335
5.1. Weighted projective spaces	335
5.2. Vaughan-Wooley cubic	337
5.3. Cubic $xyz = u^3$	338
References	340