

ASTÉRIQUE 279

COHOMOLOGIES p -ADIQUES ET
APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (II)

édité par

Pierre Berthelot
Jean-Marc Fontaine
Luc Illusie
Kazuya Kato
Michael Rapoport

Société Mathématique de France 2002

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P. Berthelot

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

E-mail : `Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr`

Url : `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/`

J.-M. Fontaine

Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

E-mail : `fontaine@math.u-psud.fr`

L. Illusie

Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

E-mail : `illusie@math.u-psud.fr`

K. Kato

Department of mathematics, faculty of science, Kyoto university, Kyoto, 606-8502, Japon.

E-mail : `kazuya@kum.kyoto-u.ac.jp`

M. Rapoport

Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Allemagne.

E-mail : `rapoport@math.uni-koeln.de`

Url : `http://www.mi.uni-koeln.de`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G10, 11G25, 11S20, 12H25, 13N10, 14A99, 14D05, 14D06, 14D10, 14E05, 14E20, 14E22, 14F10, 14F20, 14F30, 14F35, 14F40, 14G20, 14G22, 16S32, 32C38.

Mots clefs. — Puissances divisées, opérateur différentiel, $\mathcal{D}$ -module, isocrystal, sur-convergence, complexe parfait, opération cohomologique, cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline, cohomologie rigide, Frobenius, variété caractéristique, module holonome, cohomologie étale, réduction semi-stable, site syntomique, coefficients p -adiques, cohomologie étale p -adique, géométrie logarithmique, monoïde, log structure, log schéma, Kummer, log étale, log lisse, diviseur à croisements normaux, revêtement, groupe fondamental, cohomologie de Betti, cohomologie ℓ -adique, modéré, log éclatement, variété torique, acyclicité, cycles proches, cycles évanescents, monodromie, poids, régulier, pureté, changement de base, représentation p -adique.

COHOMOLOGIES p -ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (II)

édité par Pierre Berthelot, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie,
Kazuya Kato, Michael Rapoport

Résumé. — Ce volume est le second d'une série de trois consacrés aux méthodes p -adiques en géométrie arithmétique. Il est centré autour des problèmes de construction des cohomologies p -adiques et des théorèmes de comparaison entre ces cohomologies : géométrie logarithmique, cohomologie cristalline, D -modules arithmétiques, équations différentielles p -adiques, et théorèmes de comparaison de Faltings et Tsuji.

Abstract (p -adic cohomologies and arithmetic applications (II))

This volume is the second of three dealing with p -adic methods in arithmetic geometry. It is centered around the construction of p -adic cohomology theories and comparison theorems between these cohomologies : logarithmic geometry, crystalline cohomology, arithmetic D -modules, p -adic differential equations, and comparison theorems of Faltings and Tsuji.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles	ix
Abstracts	xi
Introduction	xiii
 P. BERTHELOT — <i>Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules</i>	1
Introduction	1
1. Calcul différentiel modulo p^n	7
2. Opérations cohomologiques modulo p^n	18
3. Passage aux schémas formels	33
4. Passage à la limite sur le niveau	44
5. Variété caractéristique et holonomie	64
Références	77
 C. BREUIL & W. MESSING — <i>Torsion étale and crystalline cohomologies</i>	81
1. Introduction	81
2. The ℓ -torsion case	83
3. The p -torsion case: good reduction and Fontaine-Laffaille-Messing theory ..	87
4. Semi-stable reduction: why $W_n\langle u \rangle$ -modules?	91
5. A generalization of the Fontaine-Laffaille theory	95
6. Log-syntomic morphisms and topology: a review	101
7. A generalization of the Deligne-Illusie-Fontaine-Messing isomorphism ...	109
8. The log-syntomic cohomology	113
9. Applications and open problems	116
References	121

G. CHRISTOL & Z. MEBKHOUT — <i>Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes</i>	125
1. Introduction	126
Chapitre I. Fondements de la théorie des équations différentielles p -adiques ..	132
2. Notations générales	132
3. Modules différentiels	132
4. Rayon de convergence	135
5. La théorie de Dwork et Robba	137
6. Rayon de convergence et majoration de la dérivation	139
7. Frobenius	143
Chapitre II. Le théorème de décomposition	147
8. $\mathcal{R}$ -modules différentiels solubles	147
9. Pentas d'un module différentiel	152
Chapitre III. Modules différentiels de pente nulle	159
10. L'ensemble des exposants	160
11. Exposant d'un module différentiel de Robba	161
12. Structure des modules différentiels de pente nulle	165
Chapitre IV. Théorèmes d'indice	167
13. Opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux	167
14. Indice des $\mathcal{R}$ -modules différentiels	169
Chapitre V. Démonstration du théorème d'algébricité	173
15. Réduction au cas irréductible	174
16. Réduction au cas complètement irréductible	175
17. Le cas complètement irréductible	177
Index des notations	180
Index terminologique	181
Références	182
 G. FALTINGS — <i>Almost Étale Extensions</i>	185
0. Introduction	185
1. Almost-Mathematics	186
2. Almost étale coverings	188
3. Global Cohomology	212
4. Chern-classes and Gysin-maps	228
5. Crystalline Cohomology	243
5*. Appendix: Cohomology of Frobenius-isocrystals	260
6. Complements: Relative case, Fontaine-Lafaille theory	265
6*. Appendix: Some more almost mathematics	267
References	269
 L. ILLUSIE — <i>An Overview of the Work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on Logarithmic Étale Cohomology</i>	271
1. Log schemes	272
2. Kummer étale topology	275

3. Finite Kummer étale covers	279
4. Log geometric points and fundamental groups	283
5. Comparison theorems	289
6. Acyclicity of log blow-ups	293
7. Purity	302
8. Nearby cycles	306
9. Full log étale topology and cohomology	315
References	320
 T. TSUJI — <i>Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: a survey</i>	323
1. Introduction	323
2. The rings B_{crys} , B_{st} , B_{dR} and p -adic representations	327
3. Logarithmic structures	334
4. Log crystalline cohomology	337
5. Syntomic complex	343
6. Syntomic complexes and p -adic nearby cycles	352
7. Proof of C_{st}	357
Appendix. C_{st} implies C_{dR}	361
References	369

RÉSUMÉS DES ARTICLES

<i>Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules</i>	1
PIERRE BERTHELOT	1

Dans ce texte, qui est un résumé du cours fait au Centre Émile Borel au printemps 1997, nous expliquons comment étendre un certain nombre de résultats classiques de la théorie algébrique des modules sur les anneaux d'opérateurs différentiels, lorsque le schéma de base n'est pas nécessairement de caractéristique 0. Nous montrons en particulier comment se généralisent les résultats basés sur la cohérence, aussi bien dans le cas algébrique que pour les différents complétés que l'on est amené à introduire sur un schéma formel p -adique. Nous donnons enfin quelques résultats et conjectures sur la notion d'holonomie, pour les $\mathcal{D}$ -modules munis d'une action de Frobenius.

<i>Torsion étale and crystalline cohomologies</i>	81
CHRISTOPHE BREUIL & WILLIAM MESSING	81

Ce texte suit le contenu de nos deux cours au Centre Émile Borel de l'I.H.P. durant le semestre p -adique de 1997. Il présente un survol des théories de Fontaine-Laffaille et Fontaine-Messing et (de manière plus détaillée) de leur généralisation par l'un d'entre nous au cas de réduction semi-stable. Il décrit aussi très brièvement un analogue ℓ -adique dû à Nakayama. Nous en profitons pour inclure quelques preuves qui ne se trouvent pas dans la littérature et pour soulever plusieurs questions ouvertes.

<i>Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes</i>	125
GILLES CHRISTOL & ZOGHMAN MEBKHOUT	125

Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des fonctions analytiques au bord du disque $D(0, 1)$ d'un corps p -adique et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque tout entier. Le but de ce cours est de montrer que, sous certaines conditions de nature arithmétique portant sur la monodromie p -adique, un $\mathcal{R}$ -module libre de type fini à connexion contient un $\mathcal{A}$ -réseau sur lequel la connexion a pour seule singularité une singularité méromorphe en 0. Ce résultat est motivé par les propriétés de finitude locales et globales dans la théorie des coefficients p -adiques. Sa démonstration utilise tous les résultats connus de la théorie des équations différentielles p -adiques et fournit donc l'occasion de présenter cette dernière.

Almost Étale Extensions

GERD FALTINGS 185

La théorie des revêtements presque étales permet la comparaison entre les cohomologies cristalline et étale p -adique des schémas au-dessus d'un anneau de valuation discrète p -adique. Nous donnons une démonstration nouvelle du principal ingrédient technique (théorème de pureté) et étendons ce résultat à toutes les singularités toroïdales. Nous en déduisons une démonstration du théorème de comparaison de Tsuji pour des schémas possédant ce genre de singularités incluant le cas de systèmes locaux appropriés. En chemin, nous sommes amené à établir des résultats de finitude pour la cohomologie cristalline à coefficients dans de tels systèmes locaux.

An Overview of the Work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on Logarithmic Étale Cohomology

LUC ILLUSIE 271

Ce texte présente les travaux de K. Fujiwara, K. Kato et C. Nakayama sur la cohomologie log étale des log schémas. Après quelques rappels sur le langage des log schémas, nous définissons et étudions une classe de morphismes log étales de log schémas appelés morphismes de Kummer étales (généralisation des morphismes modérément ramifiés de la géométrie algébrique classique), puis la topologie et la cohomologie associées. Les principaux résultats sont des théorèmes de comparaison avec la cohomologie étale classique et la cohomologie de log Betti, un théorème d'invariance de la cohomologie Kummer étale par log éclatements (dont nous donnons une démonstration détaillée), et un théorème de locale acyclicité pour les log schémas log lisses sur un trait, impliquant un théorème de modération pour les cycles proches classiques correspondants. Dans la dernière partie, nous énonçons des résultats de K. Kato sur la cohomologie log étale, où la localisation par les morphismes de Kummer étales est remplacée par la localisation par tous les morphismes log étales.

Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey

TAKESHI TSUJI 323

Nous donnons les grandes lignes de la démonstration de la conjecture semi-stable de J. -M. Fontaine et U. Jannsen par O. Hyodo, K. Kato et l'auteur. Cette conjecture compare les deux cohomologies p -adiques : la cohomologie étale p -adique et la cohomologie de de Rham associées à une variété propre et lisse sur un corps p -adique ayant réduction semi-stable ; elle affirme surtout que ces deux cohomologies avec leurs structures additionnelles peuvent être reconstruites l'une de l'autre. Notre démonstration utilise la cohomologie syntomique, qui a été introduite par J.-M. Fontaine et W. Messing, comme un pont entre les deux cohomologies. Dans l'appendice, nous montrons aussi que la conjecture semi-stable implique la conjecture de de Rham à l'aide de l'altération de de Jong.