

334

ASTÉRISQUE

2010

LA DROITE DE BERKOVICH SUR $\mathbf{Z}$

Jérôme Poineau

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 334, 2010

Comité de rédaction

Guy DAVID	Fabrice PLANCHON
Olivier DEBARRE	Raphaël ROQUIER
Damien GABORIAU	Wolfgang SOERGEL
Patrice LE CALVEZ	Wendelin WERNER
Robert Alain OLIVER	
Yves ANDRÉ (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 70 € (\$ 105)

Abonnement Europe : 454 €, hors Europe : 503 € (\$ 754)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2010

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-294-5

Directeur de la publication : Aline BONAMI

334

ASTÉRISQUE

2010

LA DROITE DE BERKOVICH SUR **$\mathbf{Z}$**

Jérôme Poineau

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Jérôme Poineau

Institut de recherche mathématique avancée
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France
`jerome.poineau@math.unistra.fr`

Classification mathématique par sujet (2000). — 14G22, 14G25, 30B10, 13E05, 12F12.

Mots-clés. — Espaces de Berkovich, géométrie analytique globale, séries arithmétiques convergentes, noethérianité, problème inverse de Galois.

LA DROITE DE BERKOVICH SUR $\mathbf{Z}$

Jérôme POINEAU

Résumé. — Ce texte est consacré à l'étude de la droite de Berkovich au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Cet objet géométrique contient naturellement des copies de la droite analytique complexe (ou de son quotient par la conjugaison), associées aux places infinies, et des droites de Berkovich classiques au-dessus de corps ultramétriques complets, associées aux places finies. Nous montrons qu'il jouit de bonnes propriétés, topologiques aussi bien qu'algébriques. Nous exhibons également quelques espaces de Stein naturels contenus dans cette droite.

Nous proposons des applications de cette théorie à l'étude des séries arithmétiques convergentes : prescription de zéros et de pôles, noethérianité d'anneaux globaux et problème inverse de Galois. Des exemples typiques de telles séries sont fournis par les fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert complexe dont le développement en 0 est à coefficients entiers.

Abstract (The Berkovich Line over $\mathbf{Z}$). — This text is devoted to the study of the Berkovich line over the ring of integers of a number field. It is a geometric object which naturally contains complex analytic lines (or their quotient by conjugation), associated to the infinite places, and classical Berkovich lines over complete valued fields, associated to the finite places. We prove that it satisfies nice properties, both from the topological and algebraic points of view. We also provide a few examples of Stein spaces that are contained in this line.

We explain how this theory may be applied to address various questions about convergent arithmetic power series: prescribing zeroes and poles, proving that global rings are Noetherian or constructing Galois groups over them. Typical examples of such series are given by holomorphic functions on the complex open unit disc whose Taylor developments in 0 have integer coefficients.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	i
Description des espaces en jeu	ii
Géométrie analytique complexe	iii
Géométrie analytique p -adique	iii
L'approche de Vladimir G. Berkovich	iv
Chapitre 1 : Espaces analytiques sur un anneau de Banach	vi
Chapitre 2 : Algèbres de séries convergentes	vi
Chapitre 3 : Espace affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres	vi
Chapitre 4 : Droite affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres	vii
Chapitre 5 : Morphismes finis	vii
Chapitre 6 : Espaces de Stein	viii
Chapitre 7 : Applications	ix
Remerciements	xi
 1. Espaces analytiques sur un anneau de Banach	 1
1.1. Définitions	1
1.1.1. Spectre analytique d'un anneau de Banach	1
1.1.2. Espace affine analytique	5
1.1.2.1. Espace affine analytique sur un corps archimédien	9
1.1.2.2. Droite sur un corps trivialement valué	9
1.1.2.3. Droite sur un corps ultramétrique quelconque	12
1.1.3. Faisceau structural	15
1.2. Parties compactes spectralement convexes	20
1.3. Flot	28
 2. Algèbres de séries convergentes	 35
2.1. Algèbres globales de disques et de couronnes	36
2.2. Limites d'algèbres de disques	41
2.2.1. Théorèmes de Weierstraß	43
2.2.2. Propriétés	48
2.3. Limites d'algèbres de couronnes	52
2.4. Exemples d'anneaux locaux	56

2.5. Hensélianité	62
2.5.1. Démonstration	62
2.5.2. Isomorphismes locaux	63
3. Espace affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres	69
3.1. Spectre analytique d'un anneau d'entiers de corps de nombres	70
3.1.1. Description ensembliste et topologique	70
3.1.2. Faisceau structural	78
3.1.2.1. Parties compactes	78
3.1.2.2. Parties ouvertes	80
3.1.2.3. Bord de Shilov	84
3.2. Faisceau structural sur l'espace affine	86
3.2.1. Anneaux locaux	86
3.2.2. Anneaux de sections globales	93
3.3. Points rigides des fibres	102
3.3.1. Isomorphismes locaux	102
3.3.2. Voisinages sur la droite	108
3.3.3. Étude topologique locale	112
3.3.4. Étude algébrique locale	115
3.4. Fibres internes	116
3.5. Dimension topologique	123
3.6. Prolongement analytique	125
4. Droite affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres ..	129
4.1. Récapitulatif	130
4.2. Points de type 3	136
4.2.1. Fibres extrêmes	136
4.2.2. Fibre centrale	139
4.3. Points de type 2	140
4.3.1. Fibres extrêmes	141
4.3.2. Fibre centrale	148
4.4. Résumé	154
4.5. Cohérence	157
5. Morphismes finis	161
5.1. Morphismes topologiques finis	162
5.2. Théorème de division de Weierstraß global	163
5.3. Un exemple	170
5.4. Théorème de division de Weierstraß en un point rigide	177
5.5. Endomorphismes de la droite	181
5.6. Au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres	185
6. Espaces de Stein	191
6.1. Définitions	192

6.2. Cadre général pour les compacts	196
6.2.1. Lemmes de Cousin et de Cartan	196
6.2.2. Prolongement de sections d'un faisceau	202
6.3. Parties compactes de la base	206
6.4. Parties compactes des fibres	211
6.5. Couronnes compactes de la droite	219
6.6. Lemniscates de la droite	225
6.6.1. Exhaustions de Stein	225
6.6.2. Fermeture des modules	226
6.6.3. Conclusion	236
7. Applications	243
7.1. Problèmes de Cousin arithmétiques	244
7.1.1. Problème de Cousin multiplicatif	244
7.1.2. Problème de Cousin additif	246
7.1.3. Théorème de Poincaré	250
7.2. Noéthérianité d'anneaux de séries arithmétiques	251
7.2.1. Sous-variétés analytiques	251
7.2.2. Théorème de Frisch	253
7.2.3. Séries arithmétiques	256
7.3. Problème de Galois inverse	259
7.3.1. Construction locale de revêtements cycliques	260
7.3.2. Recollement	264
Bibliographie	271
Glossaire des notations	275
Index	281

