

357

ASTÉRISQUE

2013

THE FORMAL THEORY OF TANNAKA DUALITY

Daniel Schäppi

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 357, 2013

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOEN
Hélène ESNAULT	
Éric VASSEROT (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 42 € (\$ 63)

Abonnement Europe : 484 €, hors Europe : 523 € (\$ 784)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2013

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179
ISBN 978-2-85629-773-5

Directeur de la publication : Marc Peigné

357

ASTÉRISQUE

2013

THE FORMAL THEORY OF TANNAKA DUALITY

Daniel Schäppi

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Daniel SCHÄPPI
University of Chicago
Department of Mathematics
5734 S University Avenue
60637 Chicago, USA
`schaeppi@math.uchicago.edu`

THE FORMAL THEORY OF TANNAKA DUALITY

Daniel SCHÄPPI

Abstract. — A Tannakian category is an abelian tensor category equipped with a fiber functor and additional structures which ensure that it is equivalent to the category of representations of some affine groupoid scheme acting on the spectrum of a field extension. If we are working over an arbitrary commutative ring rather than a field, the categories of representations cease to be abelian. We provide a list of sufficient conditions which ensure that an additive tensor category is equivalent to the category of representations of an affine groupoid scheme acting on an affine scheme, or, more generally, to the category of representations of a Hopf algebroid in a symmetric monoidal category. In order to do this we develop a “formal theory of Tannaka duality” inspired by Ross Street’s “formal theory of monads.” We apply our results to certain categories of filtered modules which are used to study p -adic Galois representations.

Résumé (La théorie formelle de dualité tannakienne). — Une catégorie tannakienne est une catégorie abélienne tensorielle munie d’un foncteur fibré et de structures additionnelles de manière à être équivalente à la catégorie des représentations d’un groupoïde affine agissant sur le spectre d’une extension de corps. Si l’on remplace les corps par des anneaux commutatifs, les catégories des représentations ne seront plus abéliennes. Nous donnons des conditions suffisantes pour qu’une catégorie additive tensorielle soit équivalente à la catégorie des représentations d’un schéma en groupoïdes affines, ou plus généralement, à la catégorie des représentations d’un algebroïde de Hopf dans une catégorie symétrique monoïdale. Pour ce faire nous développons une « théorie formelle de dualité tannakienne » inspirée par la « théorie formelle des monades » de Ross Street. Nous appliquons nos résultats à certaines catégories des modules filtrés qui sont utilisées pour étudier les représentations galoisiennes p -adiques.

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. Motivating example	2
1.2. Generalization to arbitrary cosmoi	2
1.3. Discussion of results	3
1.4. Outline	7
Acknowledgments	9
2. The category of filtered modules	11
2.1. Filtered F -modules	11
2.2. Autonomous symmetric monoidal structure	12
3. Outline of the Tannakian biadjunction	15
3.1. The Tannakian biadjunction	15
3.2. Recollections about enriched category theory	15
3.3. The bicategory of modules	16
3.4. The category of comonads in $\mathbf{Mod}(\mathcal{V})$	16
3.5. Cauchy completion and fiber functors	17
3.6. The right biadjoint	18
3.7. Monoidal structure	18
4. The Tannakian biadjunction for general 2-categories	21
4.1. Outline	21
4.2. The 2-category $\mathbf{Comon}(B)$ of comonads on B	22
4.3. The slice 2-category $\mathbf{Map}(\mathcal{M})/B$	22
4.4. String diagrams and the calculus of mates	23
4.5. The 2-functor L	24
4.6. Tannaka-Krein objects	25
4.7. The pseudofunctor $\mathbf{Rep}(-)$	26
4.8. Proof of the Tannakian biadjunction	28
5. Details for the Tannakian biadjunction in $\mathbf{Mod}(\mathcal{V})$	29
5.1. Recollections about weighted colimits	29
5.2. Free cocompletions	31
5.3. The 2-category $\mathcal{M}$ and maps in $\mathbf{Mod}(\mathcal{V})$	32
5.4. The existence of Tannaka-Krein objects	33

5.5. The counit of the Tannakian biadjunction	36
5.6. The semantics-structure adjunction	36
5.7. The unit of the Tannakian biadjunction	36
6. The recognition theorem in $\mathbf{Mod}(\mathcal{V})$	39
6.1. Statement of the theorem	39
6.2. The enriched Beck monadicity theorem	40
6.3. The proof of the recognition theorem	41
7. Cosmoi with dense autonomous generator	45
7.1. Dense $\mathcal{V}$ -functors and dense $\mathcal{V}$ -categories	45
7.2. Dense autonomous generators	46
7.3. Locally presentable categories	47
7.4. The recognition theorem when $\mathcal{V}$ has a DAG	48
7.5. The counit of the biadjunction when $\mathcal{V}$ has a DAG	49
8. Further simplifications when $\mathcal{V}$ is abelian	53
8.1. Projective objects and tame $\mathcal{V}$ -categories	53
8.2. The recognition theorem for abelian cosmoi with DAG	54
8.3. Proof of Theorem 8.2.1	56
8.4. Proof of Theorem 8.2.4	60
8.5. Examples of tame categories	62
9. Tannakian duality for bialgebras and Hopf algebras	67
9.1. Multiplicative structures on $\mathbf{Mod}(\mathcal{V})$	67
9.2. Monoidal 2-categories	69
9.3. Braiding	71
9.4. Syllepsis and symmetry	72
9.5. Autonomous pseudomonoids and Hopf monoidal comonads	73
10. Affine groupoids over commutative rings	75
10.1. Monoidal morphisms in $\mathbf{Mod}(\mathcal{V})$ and cospans in $\mathbf{CommAlg}(\mathcal{V})$..	75
10.2. Tannaka duality for Hopf algebroids and affine groupoids	76
11. The Tannakian biadjunction for Gray monoids	79
11.1. String diagrams for Gray monoids	79
11.2. Compatibility with the monoidal structure	82
11.3. Braiding	85
11.4. Syllepsis and symmetry	87
11.5. Biduality and autonomous Gray monoids	89
11.6. Hopf monoidal comonads	92
12. Base change	97
12.1. Base change for 2-categories	97
12.2. Base change and monoidal structures	98

12.3. Base change for cosmoi	101
A. Density in cosmoi with dense autonomous generator	105
A.1. Representations of monoidal categories	105
B. Monoidal biadjunctions	109
B.1. Overview	109
B.2. Monoidal biadjunctions and strictification	109

