

**363-364**

**ASTÉRISQUE**

**2014**

TRAVAUX DE GABBER  
SUR L'UNIFORMISATION LOCALE ET LA COHOMOLOGIE  
ÉTALE DES SCHÉMAS QUASI-EXCELLENTS

Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008

dirigé par Luc Illusie, Yves Laszlo et Fabrice Orgogozo

Avec la collaboration de  
Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud,  
Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 363-364, 2014

---

***Comité de rédaction***

|                      |                  |
|----------------------|------------------|
| Ahmed ABBES          | Damien GABORIAU  |
| Viviane BALADI       | Michael HARRIS   |
| Gérard BESSON        | Fabrice PLANCHON |
| Laurent BERGER       | Pierre SCHAPIRA  |
| Philippe BIANE       | Bertrand TOËN    |
| Hélène ESNAULT       |                  |
| Éric VASSEROT (dir.) |                  |

***Diffusion***

|                         |                          |                     |
|-------------------------|--------------------------|---------------------|
| Maison de la SMF        | Hindustan Book Agency    | AMS                 |
| Case 916 - Luminy       | O-131, The Shopping Mall | P.O. Box 6248       |
| 13288 Marseille Cedex 9 | Arjun Marg, DLF Phase 1  | Providence RI 02940 |
| France                  | Gurgaon 122002, Haryana  | USA                 |
| smf@smf.univ-mrs.fr     | Inde                     | www.ams.org         |

***Tarifs***

*Vente au numéro* : 140 € (\$ 210)

*Abonnement* Europe : 530 €, hors Europe : 569 € (\$ 853)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

***Secrétariat : Nathalie Christiaën***

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2014

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-790-2

Directeur de la publication : Marc Peigné

---

**363-364**

**ASTÉRISQUE**

**2014**

TRAVAUX DE GABBER  
SUR L'UNIFORMISATION LOCALE ET LA COHOMOLOGIE  
ÉTALE DES SCHÉMAS QUASI-EXCELLENTS

Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008

dirigé par Luc Illusie, Yves Laszlo et Fabrice Orgogozo

Avec la collaboration de  
Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud,  
Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Luc Illusie*

Mathématique, Bât. 425

Université Paris-Sud

91405 Orsay Cedex - France

Luc.Illusie@math.u-psud.fr

*Yves Laszlo*

École normale supérieure

45 rue d'Ulm

75005 Paris - France

yves.laszlo@ens.fr

*Fabrice Orgogozo*

Centre de mathématiques Laurent Schwartz

École polytechnique

91128 Palaiseau Cedex - France

Fabrice.Orgogozo+math@normalesup.org

---

***Classification mathématique par sujet (2000).*** — 12F15, 12G05, 12G10, 12L10, 13B02, 13B40, 13F40, 13H05, 13J10, 14B05, 14E15, 14F17, 14F20, 14L30, 18F10, 20M32.

***Mots-clefs.*** — Diviseurs à croisements normaux, altérations, approximation d'Artin, champs en groupoïdes, cohomologie étale, cycles proches, descente cohomologique, dimension cohomologique, désingularisation canonique, géométrie logarithmique, pureté, revêtement modéré, rigidité, résolution des singularités, topos, torseurs.

# TRAVAUX DE GABBER SUR L'UNIFORMISATION LOCALE ET LA COHOMOLOGIE ÉTALE DES SCHÉMAS QUASI-EXCELLENTS

dirigé par Luc ILLUSIE, Yves LASZLO et Fabrice ORGOGOZO

**Résumé.** — Les travaux d'Ofer Gabber présentés dans ce volume comportent deux parties étroitement liées, l'une, géométrique, l'autre, cohomologique. La première est constituée de théorèmes d'uniformisation locale, affirmant que tout couple formé par un schéma noethérien quasi-excellent et un fermé rare devient, après localisation par des morphismes étales et des altérations convenables, isomorphe au couple formé par un schéma régulier et un diviseur à croisements normaux. Il s'agit de résultats de nature locale, mais leur démonstration fournit des corollaires globaux, raffinant des théorèmes d'altération de de Jong pour les schémas de type fini sur un corps ou un anneau de Dedekind. Des techniques de géométrie logarithmique, et, pour les résultats les plus fins, de désingularisation canonique en caractéristique nulle jouent un rôle clef dans les démonstrations. Dans la seconde partie, on donne des applications, accompagnées d'exemples et contre-exemples, à des théorèmes de finitude (abéliens), de dimension cohomologique, et de dualité en cohomologie étale sur les schémas quasi-excellents. On y démontre notamment la conjecture de dualité locale de Grothendieck, et, par une nouvelle méthode, sa conjecture de pureté cohomologique absolue. Des résultats de rigidité et finitude non abéliens sont également établis dans les derniers exposés.

**Abstract (Gabber's work on local uniformization and étale cohomology of quasi-excellent schemes.)** — The work of Ofer Gabber presented in this book can be divided roughly into two closely related parts, a geometric one and a cohomological one. The first part contains local uniformization theorems which state that any pair consisting of a quasi-excellent noetherian scheme and a nowhere dense closed subscheme becomes isomorphic, after localization by suitable étale morphisms and alterations, to a pair consisting of a regular scheme and a normal crossings divisor. These are local results, but their proofs have global theorems as corollaries, refining alteration theorems of de Jong for schemes of finite type over a field or a Dedekind ring. Techniques from logarithmic geometry and, as regards the finest results, canonical desingularization in characteristic zero, play a key role in the proofs. In the second part, we give

applications, with examples and counter-examples, to abelian finiteness theorems, as well as theorems on cohomological dimension and duality in étale cohomology over quasi-excellent schemes. In particular, Grothendieck's local duality conjecture is proved, and his absolute cohomological purity conjecture is proved by a new method. Non-abelian rigidity and finiteness results are also established in the final exposés.

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                   |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>Introduction</b> .....                                                         | xiii  |
| <b>Remerciements</b> .....                                                        | xxi   |
| <b>Leitfaden</b> .....                                                            | xxiii |
| <b>I. Anneaux excellents</b> .....                                                | 1     |
| par Michel Raynaud, rédigé par Yves Laszlo                                        |       |
| 1. Introduction .....                                                             | 1     |
| 2. Définitions .....                                                              | 1     |
| 3. Exemples immédiats. ....                                                       | 5     |
| 4. L'exemple de base : les anneaux locaux noethériens complets. ....              | 5     |
| 5. Permanence par localisation et extension de type fini .....                    | 6     |
| 6. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux universellement<br>japonais ..... | 9     |
| 7. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux excellents .....                  | 10    |
| 8. Hensélisation et anneaux excellents .....                                      | 11    |
| 9. Complétion formelle et anneaux excellents .....                                | 12    |
| 10. Approximation d'Artin et anneaux excellents .....                             | 13    |
| 11. Exemples de méchants anneaux noethériens .....                                | 14    |
| <b>II. Topologies adaptées à l'uniformisation locale</b> .....                    | 21    |
| par Fabrice Orgogozo                                                              |       |
| 1. Morphismes maximalelement dominants et la catégorie $\text{alt}/S$ .....       | 21    |
| 2. Topologies : définitions .....                                                 | 25    |
| 3. Formes standard .....                                                          | 28    |
| 4. Applications .....                                                             | 31    |
| <b>III. Approximation</b> .....                                                   | 37    |
| par Luc Illusie et Yves Laszlo                                                    |       |
| 1. Introduction .....                                                             | 37    |
| 2. Modèles et approximations à la Artin-Popescu .....                             | 37    |
| 3. Approximations et topologie des altérations .....                              | 39    |
| 4. Gradués supérieurs et approximations de complexes .....                        | 42    |
| 5. Modèles et $a$ -isomorphismes .....                                            | 45    |

|                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6. Réduction au cas local noethérien complet .....                           | 47         |
| <b>IV. Le théorème de Cohen-Gabber .....</b>                                 | <b>51</b>  |
| par Fabrice Orgogozo                                                         |            |
| 1. $p$ -bases et différentielles (rappels) .....                             | 51         |
| 2. Les théorèmes de Cohen-Gabber en caractéristique $> 0$ .....              | 55         |
| 3. Autour du théorème de Epp .....                                           | 61         |
| 4. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte .....                | 63         |
| <b>V. Algébrisation partielle .....</b>                                      | <b>69</b>  |
| par Fabrice Orgogozo                                                         |            |
| 1. Préparatifs (rappels) .....                                               | 69         |
| 2. Algébrisation partielle en égale caractéristique .....                    | 71         |
| 3. Algébrisation partielle première à $\ell$ en caractéristique mixte .....  | 73         |
| <b>VI. Log régularité, actions très modérées .....</b>                       | <b>77</b>  |
| par Luc Illusie                                                              |            |
| 1. Log régularité .....                                                      | 77         |
| 2. Revêtements Kummer étales .....                                           | 80         |
| 3. Actions très modérées .....                                               | 84         |
| 4. Points fixes .....                                                        | 92         |
| <b>VII. Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible) .....</b> | <b>99</b>  |
| par Fabrice Orgogozo                                                         |            |
| 1. Énoncé .....                                                              | 99         |
| 2. Réductions : rappel des résultats antérieurs .....                        | 99         |
| 3. Fibration en courbes et application d'un théorème de A. J. de Jong ..     | 100        |
| 4. Résolution des singularités .....                                         | 101        |
| <b>VIII. Gabber's modification theorem (absolute case) .....</b>             | <b>103</b> |
| par Luc Illusie et Michael Temkin                                            |            |
| 1. Statement of the main theorem .....                                       | 103        |
| 2. Functorial resolutions .....                                              | 105        |
| 3. Resolution of log regular log schemes .....                               | 119        |
| 4. Proof of Theorem 1.1 – preliminary steps .....                            | 143        |
| 5. Proof of Theorem 1.1 – Abelian inertia .....                              | 150        |
| <b>IX. Uniformisation locale première à <math>\ell</math> .....</b>          | <b>161</b> |
| par Luc Illusie                                                              |            |
| 1. Rappel de l'énoncé et premières réductions .....                          | 161        |
| 2. Log régularité, fin de la démonstration .....                             | 164        |
| <b>X. Gabber's modification theorem (log smooth case) .....</b>              | <b>167</b> |
| par Luc Illusie et Michael Temkin                                            |            |
| 1. The main theorem .....                                                    | 168        |

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2. Prime to $\ell$ variants of de Jong's alteration theorems .....                    | 185 |
| 3. Resolvability, log smoothness, and weak semistable reduction .....                 | 194 |
| <b>XI. Produits orientés</b> .....                                                    | 213 |
| par Luc Illusie                                                                       |     |
| 1. Construction des produits orientés .....                                           | 213 |
| 2. Tubes et changement de base .....                                                  | 220 |
| 3. Produits fibrés .....                                                              | 227 |
| 4. Topos évanescents et co-évanescents .....                                          | 229 |
| <b>XII<sub>A</sub>. Descente cohomologique orientée</b> .....                         | 235 |
| par Fabrice Orgogozo                                                                  |     |
| 1. Acyclicité orientée des morphismes propres .....                                   | 235 |
| 2. Descente cohomologique orientée .....                                              | 241 |
| <b>XII<sub>B</sub>. On hyper base change</b> .....                                    | 251 |
| par Weizhe Zheng                                                                      |     |
| 1. A descent formalism .....                                                          | 251 |
| 2. Variants and counterexamples .....                                                 | 256 |
| 3. Appendix: Proper base change for stacks on topological spaces .....                | 258 |
| <b>XIII. Le théorème de finitude</b> .....                                            | 261 |
| par Fabrice Orgogozo                                                                  |     |
| 1. Introduction .....                                                                 | 261 |
| 2. Constructibilité via l'uniformisation locale faible .....                          | 262 |
| 3. Constructibilité et annulation via l'uniformisation locale première à $\ell$ ..... | 266 |
| 4. Coefficients $\ell$ -adiques .....                                                 | 273 |
| <b>XIV. Fonctions de dimension</b> .....                                              | 277 |
| par Vincent Pilloni et Benoît Stroh                                                   |     |
| 1. Universelle caténarité des schémas henséliens .....                                | 277 |
| 2. Spécialisations immédiates et fonctions de dimension .....                         | 280 |
| <b>XV. Théorème de Lefschetz affine</b> .....                                         | 293 |
| par Vincent Pilloni et Benoît Stroh                                                   |     |
| 1. Énoncé du théorème et premières réductions .....                                   | 293 |
| 2. Pureté, combinatoire des branches et descente .....                                | 294 |
| 3. Uniformisation et approximation des données .....                                  | 297 |
| <b>XVI. Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue</b> .....               | 301 |
| par Joël Riou                                                                         |     |
| 1. Classes de Chern .....                                                             | 301 |
| 2. Morphismes de Gysin .....                                                          | 305 |
| 3. Théorème de pureté .....                                                           | 323 |
| 4. Conventions de signes .....                                                        | 340 |

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>XVII. Dualité</b> .....                                                            | 351 |
| par Joël Riou                                                                         |     |
| 1. Le morphisme de transition en codimension 1 .....                                  | 353 |
| 2. Complexes dualisants putatifs et potentiels .....                                  | 364 |
| 3. Morphismes de transition généraux et classe de cohomologie en degré maximal .....  | 370 |
| 4. Compléments sur les complexes dualisants potentiels .....                          | 385 |
| 5. Existence et unicité des complexes dualisants potentiels .....                     | 393 |
| 6. Le théorème de dualité locale .....                                                | 401 |
| 7. Anneaux de coefficients généraux .....                                             | 411 |
| 8. Produits tensoriels de complexes non bornés .....                                  | 432 |
| 9. Complexes inversibles .....                                                        | 439 |
| 10. Coefficients universels .....                                                     | 441 |
| 11. Modules ind-unipotents .....                                                      | 444 |
| 12. Le morphisme de bidualité .....                                                   | 448 |
| <b>XVIII<sub>A</sub>. Cohomological dimension: First results</b> .....                | 455 |
| par Luc Illusie                                                                       |     |
| 1. Bound in the strictly local case and applications .....                            | 455 |
| 2. Proof of the main result .....                                                     | 457 |
| <b>XVIII<sub>B</sub>. Dimension cohomologique : raffinements et compléments</b> ..... | 461 |
| par Fabrice Orgogozo                                                                  |     |
| 1. Préliminaires .....                                                                | 461 |
| 2. Construction de Nagata en dimension 2, application cohomologique ..                | 463 |
| 3. Séries formelles de Gabber, application cohomologique .....                        | 466 |
| 4. Dimension cohomologique : majoration d'une « fibre de Milnor générique » .....     | 469 |
| 5. Majoration : amélioration .....                                                    | 471 |
| 6. Dimension cohomologique d'un ouvert du spectre époiné : minoration                 | 474 |
| <b>XIX. Un contre-exemple</b> .....                                                   | 481 |
| par Yves Laszlo                                                                       |     |
| 1. Introduction .....                                                                 | 481 |
| 2. La construction .....                                                              | 481 |
| 3. Noéthérianité de $A$ .....                                                         | 485 |
| 4. Étude des points doubles .....                                                     | 488 |
| 5. $D$ est localement mais pas globalement un diviseur à croisements normaux .....    | 488 |
| <b>XX. Rigidité</b> .....                                                             | 491 |
| par Yves Laszlo et Alban Moreau                                                       |     |
| 1. Introduction .....                                                                 | 491 |
| 2. Lemme de rigidité .....                                                            | 492 |