BULLETIN DE LA S. M. F.

MOHAMMED BEKKA

PIERRE DE LA HARPE

Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière

Bulletin de la S. M. F., tome 122, n° 3 (1994), p. 333-342

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_3_333_0

© Bulletin de la S. M. F., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE
FAIBLEMENT ÉQUIVALENTES À LA
REPRÉSENTATION RÉGULIÈRE**

PAR

MOHAMMED BEKKA et PIERRE DE LA HARPE (*)

RÉSUMÉ. — Soit Γ un réseau dans un groupe de Lie réel connexe G qui est simple, de centre réduit à $\{1\}$, et non compact. Soient π une représentation unitaire de G et $\pi|_{\Gamma}$ sa restriction à Γ . Si π n'est pas triviale, on montre que $\pi|_{\Gamma}$ contient faiblement la représentation régulière λ_{Γ} de Γ . Lorsque π est dans la série principale ou dans la série discrète de G , ceci implique que la représentation $\pi|_{\Gamma}$ est faiblement équivalente à λ_{Γ} . Dans le cas où $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et lorsque π est dans la série complémentaire, on obtient aussi des résultats sur $\pi|_{\Gamma}$.

ABSTRACT. — Let Γ be a lattice in a connected real Lie group G which is simple, non compact and with centre reduced to $\{1\}$. Let π be a unitary representation of G and let $\pi|_{\Gamma}$ be its restriction to Γ . If π is not trivial, we show that $\pi|_{\Gamma}$ weakly contains the regular representation λ_{Γ} of Γ . When π is in the principal series or the discrete series of G , this implies that $\pi|_{\Gamma}$ and λ_{Γ} are weakly equivalent. In the case $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ and when π is in the complementary series, we obtain also results on $\pi|_{\Gamma}$.

1. Introduction

Soit G un groupe localement compact. Les *représentations* de G considérées ici sont les représentations unitaires continues de G dans des espaces de Hilbert complexes non nuls. Étant donné une telle représentation π dans $\mathcal{H}_{\pi}$, les *fonctions de type positif associées* à π

(*) Texte reçu le 28 septembre 1992, révisé le 26 novembre 1992.

M. BEKKA, Département de Mathématiques, Université de Lausanne, 1015 Lausanne, Suisse et Mathematisches Institut, Technische Universität München, Arcisstr. 21, D-8000, München 2, Allemagne.

P. DE LA HARPE, Section de Mathématiques, Université de Genève, C.P. 240, CH-1211, Genève 24, Suisse.

Mots clés : représentations unitaires, contenance faible, réseaux, groupes de Lie semi-simples.

Classification AMS : 22D10, 22E40.

sont les fonctions $G \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $g \mapsto \langle \xi \mid \pi(g)\xi \rangle$ où ξ est un vecteur de $\mathcal{H}_\pi$. Soient π, π' deux représentations de G ; on dit que π est *faiblement contenue* dans π' et on écrit $\pi \prec \pi'$ si les fonctions de type positif associées à π sont approchables par des sommes de fonctions de type positif associées à π' . («Approchables» veut dire ici «limites uniformes sur tout compact de G ».) On dit que π et π' sont *faiblement équivalentes* et on écrit $\pi \sim \pi'$ si $\pi \prec \pi'$ et $\pi' \prec \pi$. Pour une introduction à ces notions, voir par exemple le livre de Dixmier [DC*].

On note $L^2(G)$ l'espace des fonctions complexes de carré sommable sur G pour une mesure de Haar invariante à gauche; on note λ_G la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$. Les questions qui nous intéressent ici concernent un *sous-groupe discret* Γ d'un *groupe de Lie* G . Toute représentation π de G fournit par restriction une représentation $\pi|_\Gamma$ de Γ (agissant dans le même espace que π). Nous cherchons à comprendre quand $\pi|_\Gamma$ contient faiblement la représentation régulière λ_Γ de Γ , et plus généralement quelles sont les propriétés de l'application $\pi \mapsto \pi|_\Gamma$ du point de vue de la contenance faible.

Soit $C^*(G)$ la C^* -algèbre de G . Soit π une représentation de G dans un espace $\mathcal{H}_\pi$ et soit $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ la C^* -algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\pi$. Alors π induit un morphisme de C^* -algèbres $C^*(G) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ encore noté π , avec noyau et image respectivement notés $C^* \text{Ker}(\pi)$ et $C^*_\pi(G)$. Si $\pi = \lambda_G$, la C^* -algèbre $C^*_{\lambda_G}(G)$ est la C^* -algèbre réduite $C^*_{\text{red}}(G)$ de G . Si π et π' sont deux représentations de G , rappelons qu'on a $\pi \prec \pi'$ si et seulement si $C^* \text{Ker}(\pi) \supset C^* \text{Ker}(\pi')$. (Voir dans [DC*] les numéros 3.4.4 et 18.1.4.)

Les notations et considérations précédentes valent aussi pour un sous-groupe discret Γ de G . Supposons de plus Γ tel que $C^*_{\text{red}}(\Gamma)$ soit une C^* -algèbre simple (pour des exemples, voir entre autres [BGH], [Har], [HoR]); pour toute représentation ρ de Γ , on a dans ce cas :

$$\rho \prec \lambda_\Gamma \iff \rho \sim \lambda_\Gamma.$$

Toutefois, pour beaucoup des groupes Γ qui apparaissent ci-dessous, on ignore si les C^* -algèbres réduites correspondantes sont simples.

2. Résultats

Soit G un groupe de Lie réel connexe qui est simple, non compact, et de centre réduit à $\{1\}$. Soit $B = MAN$ un sous-groupe parabolique minimal de G ; rappelons que la *série principale* de G est la famille des représentations de la forme $\text{Ind}_B^G(\rho)$, où ρ est une représentation de B dont la restriction à M (resp. A, N) est irréductible (resp. un caractère unitaire de A , la représentation triviale de N); pour tout ceci, voir par

exemple [Wal]. Rappelons aussi que la plupart de ces représentations (mais pas toutes) sont irréductibles [Wal, th. 8.3.12]. Convenons qu'une représentation π est *triviale* si $\pi(g)\xi = \xi$ pour tous $g \in G$ et $\xi \in \mathcal{H}_\pi$; on désigne par 1_G la représentation triviale de G de dimension 1. Notons que toute représentation non triviale de G est fidèle, car G est simple. Rappelons que G est un groupe linéaire (via sa représentation adjointe) et que la topologie de Zariski est donc bien définie sur G [Zim, prop. 3.1.6].

THÉORÈME 1. — *On se donne un groupe simple G comme ci-dessus et un sous-groupe discret Γ de G dense pour la topologie de Zariski, par exemple un réseau de G . Soit π une représentation de G .*

(i) *Si π n'est pas triviale, alors $\lambda_\Gamma \prec \pi|_\Gamma$.*

(ii) *Si $\pi \prec \lambda_G$, par exemple si π est dans la série principale, alors $\lambda_\Gamma \sim \pi|_\Gamma$.*

Dans la situation du THÉORÈME 1 et lorsque Γ est un réseau de G , rappelons le résultat suivant de COWLING et STEGER [CoS] :

(iii) Si π est irréductible et n'est pas de carré intégrable, alors $\pi|_\Gamma$ est irréductible; de plus, si π et π' sont deux représentations irréductibles inéquivalentes de G qui ne sont pas de carré intégrable, alors $\pi|_\Gamma$ et $\pi'|_\Gamma$ ne sont pas équivalentes.

On sait par ailleurs qu'on a [GHJ, § 3.3.c] :

(iv) si π est irréductible dans la série discrète de G , alors $\pi|_\Gamma$ est quasi-équivalente à λ_Γ (au sens de [DC*, n° 5.3.1]).

Considérons le cas particulier de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et d'une représentation irréductible π de G . Si π est dans la série principale ou dans la série discrète, voir (ii) et (iv) ci-dessus. Les autres représentations irréductibles de G constituent la *série complémentaire* $(\pi_t)_{0 < t < 1}$, paramétrée ici comme dans [Lan]. Nous notons $\pi_{t,\Gamma}$ la restriction de π_t à un sous-groupe discret Γ de G .

THÉORÈME 2. — *Soient Γ un réseau de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et π_s, π_t deux représentations de la série complémentaire de G telles que $s < t$. Alors :*

(v) $\lambda_\Gamma \prec \pi_{t,\Gamma}$ et $\lambda_\Gamma \not\prec \pi_{s,\Gamma}$,

(vi) $\pi_{t,\Gamma} \not\sim \pi_{s,\Gamma}$.

Dans la situation du THÉORÈME 2, on sait que $C_{\mathrm{red}}^*(\Gamma)$ est simple [Har], et il résulte de (v) qu'on a des morphismes surjectifs :

$$\phi_t : C_{\pi_{t,\Gamma}}^*(\Gamma) \longrightarrow C_{\mathrm{red}}^*(\Gamma).$$

Il serait intéressant d'étudier les noyaux de ces morphismes. (Au niveau du groupe de Lie, rappelons que G est liminaire [DC*, th. 15.5.6]; par

suite $C_\pi^*(G)$ est l'idéal des opérateurs compacts dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ pour toute représentation irréductible π de G , de sorte que $C_\pi^*(G)$ est simple pour tout $\pi \in \widehat{G}$.

Dans le cas où $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, nous pouvons préciser l'assertion (vi) ci-dessus. Auparavant, rappelons que le dual unitaire $\widehat{G}$ d'un groupe localement compact G est muni de la *topologie de Fell*, pour laquelle l'adhérence d'une partie $A \subset \widehat{G}$ est définie par

$$\bar{A} = \left\{ \pi \in \widehat{G} : \pi \prec \bigoplus_{\rho \in A} \rho \right\}$$

(voir [DC*, chap. 18]). Pour $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, il est bien connu que l'application

$$]0, 1[\longrightarrow \widehat{G}, \quad t \mapsto \pi_t,$$

paramétrisant la série complémentaire, est un homéomorphisme sur son image (voir [Del, p. 306] et [EhM, th. 1 et 3]). Si Γ est un réseau de G , on a en vertu de l'assertion (iii) ci-dessus une application

$$]0, 1[\longrightarrow \widehat{\Gamma}, \quad t \mapsto \pi_{t,\Gamma}$$

qui est injective.

THÉORÈME 3. — *On considère le groupe modulaire $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ comme un réseau dans $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Pour tous $s, t \in]0, 1[$ tels que $s \neq t$, on a :*

(vii) $\pi_{s,\Gamma} \not\prec \pi_{t,\Gamma}$.

Plus précisément, l'application

$$]0, 1[\longrightarrow \widehat{\Gamma}, \quad t \mapsto \pi_{t,\Gamma}$$

est un homéomorphisme sur son image.

La preuve de ce théorème utilise des résultats de Selberg sur la représentation quasi-régulière de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Des résultats analogues sont conjecturés pour tous les sous-groupes de congruence de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Si cette «conjecture de Selberg» est vraie, le THÉORÈME 3 et sa preuve valent aussi pour ces sous-groupes.