Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ÉLÉMENTS DE DISTORSION DE $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$

Emmanuel Militon

Tome 141
Fascicule 1

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 35-46

Bull. Soc. math. France
141 (1), 2013, p. 35–46

ÉLÉMENTS DE DISTORSION DE $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$

par Emmanuel Militon

Résumé. — Dans cet article, on montre que, dans le groupe $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ des difféomorphismes isotopes à l'identité d'une variété compacte M, tout élément récurrent est de distorsion. Pour ce faire, on généralise une méthode de démonstration utilisée par Avila pour le cas de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{S}^1)$. La méthode nous permet de retrouver un résultat de Calegari et Freedman selon lequel tout homéomorphisme de la sphère isotope à l'identité est un élément de distorsion.

Abstract (*Distortion elements of* $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$). — We consider, on a compact manifold, the group of diffeomorphisms that are isotopic to the identity. We show that every recurrent element is a distortion element. To prove this, we generalize a method used by Avila in the case of the group of diffeomorphisms of the circle. The method also provides a new proof of a result by Calegari and Freedman: on a sphere, in the group of homeomorphisms that are isotopic to the identity, every element is distorted.

Texte reçu le 25 mars 2010, accepté le 9 janvier 2012.

Emmanuel Militon, Fondation mathématique Jacques Hadamard-Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex • *E-mail :* `emmanuel.militon@math.polytechnique.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 37C85.

Mots clefs. — Difféomorphisme, système dynamique, théorie géométrique des groupes.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2013/35/$ 5.00

1. Énoncé des résultats

L'étude des éléments de distorsion des groupes de difféomorphismes ou d'homéomorphismes non-conservatifs d'une variété trouve son origine dans une question de Franks et Handel (voir [6] et [5]) : une rotation du cercle est-elle distordue dans le groupe des homéomorphismes du cercle ou des difféomorphismes du cercle ? Qu'en est-il si l'on remplace le cercle par la sphère de dimension 2 ?

La réponse à ces questions est fournie par Calegari et Freedman dans [4] : une rotation du cercle est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 du cercle. Cependant, les auteurs précisent ne pas savoir s'il en est de même en régularité C^∞. Dans le même article, ils prouvent qu'une rotation de la sphère S^2 est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de la sphère. Enfin, en ce qui concerne la régularité C^0, Calegari et Freedman ont prouvé un résultat très général : en toute dimension N, un homéomorphisme h de la sphère S^N est distordu.

Dans un article ultérieur, Avila a montré que, dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^∞, tout élément récurrent est distordu. Nous généralisons dans cet article le résultat d'Avila à toute variété.

2. Résultats

Avant toute chose, commençons par introduire des définitions et des notations qui nous seront utiles par la suite.

DÉFINITION 1. — *Soit G un groupe. Pour une partie finie S de G, si un élément g de G est dans le groupe engendré par S, on note :*

$$l_S(g) = inf \left\{ n \in \mathbb{N},\ \exists(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n} \in \{\pm 1\}^n, \exists (s_i)_{1\leq i \leq n} \in S^n,\ g = \prod_{i=1}^{n} s_i^{\epsilon_i} \right\}.$$

Un élément g de G est dit distordu (ou de distorsion) s'il existe une partie finie S de G telle que g appartient au groupe engendré par S et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0.$$

On remarque que, comme la suite $(l_S(g^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive, il suffit de montrer que :

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0$$

pour obtenir que l'élément g est distordu.

Étant donnée une variété différentiable M, on note :

- $\mathrm{Homeo}_0(M)$ l'ensemble des homéomorphismes à support compact dans M isotopes à l'identité par une isotopie à support compact ;

– pour un élément r de $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $\mathrm{Diff}_0^r(M)$ l'ensemble des difféomorphismes de M de classe C^r isotopes à l'identité par une isotopie à support compact (en particulier, $\mathrm{Homeo}_0(M) = \mathrm{Diff}_0^0(M)$).

Le support d'un homéomorphisme f de M est ici défini par :

$$supp(f) = \overline{\{x \in M,\ f(x) \neq x\}}.$$

On note d_r une distance qui définit la topologie de $\mathrm{Diff}_0^r(M)$.

Définition 2. — *On dit qu'un difféomorphisme f de $\mathrm{Diff}_0^{\infty}(M)$ est récurrent si et seulement si :*

$$\liminf_{n\to+\infty} d_{\infty}(f^n, Id_M) = 0.$$

L'objet de la présente note est de démontrer les théorèmes suivants. Ce premier théorème généralise le résultat d'Avila pour les difféomorphismes du cercle (voir [1]).

Théorème 1. — *Si M est une variété compacte, tout élément récurrent de $\mathrm{Diff}_0^{\infty}(M)$ est distordu.*

Comme dans [1], la méthode employée permet de démontrer que toute suite d'éléments récurrents $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{Diff}_0^{\infty}(M)$ est simultanément distordue, au sens où l'on peut trouver un ensemble fini S tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \liminf_{p\to+\infty} \frac{l_S(f_n^p)}{p} = 0.$$

La méthode employée par [1] permet de donner une nouvelle démonstration du résultat de Calegari et Freedman (voir [4]).

Théorème 2 (Calegari-Freedman). — *Tout élément de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est distordu.*

Là encore, on pourrait montrer que toute suite d'éléments de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est simultanément distordue.

3. Démonstration des théorèmes

La démonstration des théorèmes 1 et 2 repose sur une généralisation des résultats de [1] à toute variété. La démarche et les notations sont similaires à celles présentées dans [1] mais la généralisation de la méthode aux dimensions supérieures nécessite de manière cruciale des résultats de perfection locale qui proviennent de [8]. On ne démontrera le théorème 1 que dans le cas d'une variété M de dimension supérieure ou égale à 2. Le cas de la dimension 1 est traité dans [1].

Les théorèmes vont découler des lemmes suivants.

Lemme 1. — *Soit M une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 2.*
Il existe des suites $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_\infty(h_n, Id_M) < \epsilon_n,$$

vérifie la propriété suivante : il existe un ensemble fini $S \subset$ $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ *tel que, pour tout entier n,*

- *le difféomorphisme h_n appartient au sous-groupe engendré par S.*
- *on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.*

Lemme 2. — *Soit N un entier naturel.*
Il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que, pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^N)$, *il existe un ensemble fini $S \subset$* $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^N)$ *tel que, pour tout entier n :*

- *l'homéomorphisme h_n appartient au groupe engendré par S.*
- *on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.*

Admettons pour l'instant ces lemmes, qui seront démontrés dans la section suivante, et démontrons les théorèmes.

Démonstration des théorèmes. — Soit f un élément récurrent de $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$. Considérons une application strictement croissante $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{p(n)} = 0 \\ d_\infty(f^{p(n)}, Id_M) \leq \epsilon_n \end{cases},$$

où les suites $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par le lemme 1. Ce même lemme appliqué à la suite $(f^{p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nous donne l'existence d'un ensemble fini S qui montre que f est distordu. Le théorème 2 se montre de la même manière, en utilisant le lemme 2. □

4. Démonstration des lemmes 1 et 2

Pour mener à bien la démonstration de ces lemmes, nous aurons besoin des lemmes suivants, qui seront démontrés dans la section suivante et portent sur les difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Les lemmes 3 et 4 sont des analogues des lemmes 1 et 2 dans le cas des commutateurs de difféomorphismes de $\mathbb{R}^N$. Notons $B(0,2)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2. Si f et g sont des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$, on note $[f,g]$ le difféomorphisme $fgf^{-1}g^{-1}$.