

Revue d'Histoire des Mathématiques



Passer au global : le cas d'Élie Cartan, 1922–1930

Renaud Chorlay

Tome 15 Fascicule 2

2 0 0 9

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :

Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Tom Archibald

Alain Bernard

Frédéric Brechenmacher

Marie-José Durand-Richard

Étienne Ghys

Hélène Gispert

Jens Høyrup

Agathe Keller

Laurent Mazliak

Karen Parshall

Jeanne Peiffer

Sophie Roux

Joël Sakarovich

Dominique Tournès

Directeur de la publication :

Stéphane Jaffard

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall

June Barrow-Greene

Liliane Beaulieu

Umberto Bottazzini

Jean-Pierre Bourguignon

Aldo Brigaglia

Bernard Bru

Jean-Luc Chabert

François Charette

Karine Chemla

Pierre Crépel

François De Gandt

Moritz Epple

Natalia Ermolaëva

Christian Gilain

Catherine Goldstein

Jeremy Gray

Tinne Hoff Kjeldsen

Jesper Lützen

Antoni Malet

Irène Passeron

Christine Proust

David Rowe

Ken Saito

S. R. Sarma

Erhard Scholz

Reinhard Siegmund-Schultze

Stephen Stigler

Bernard Vitrac

Secrétariat :

Nathalie Christiaën

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05

Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96

Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2009 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 36 €.

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

© SMF N° ISSN : 1262-022X

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

PASSER AU GLOBAL : LE CAS D'ÉLIE CARTAN, 1922–1930

RENAUD CHORLAY

RÉSUMÉ. — Après avoir enrichi la notion de connexion entre 1922 et 1925, Élie Cartan jette entre 1925 et 1930 les bases de l'étude topologique et géométrique globale des groupes de Lie et variétés homogènes. Nous voulons montrer que ce passage aux questions globales s'accompagne d'une réorganisation complète, aux niveaux théorique, thématique et rhétorique, autour d'une polarité local / global jusque là absente des travaux de Cartan ; elle remplace, selon nous, une polarité infinitésimal / fini héritée du XIX^e siècle. Nous procédons par une lecture chronologique attentive aux modes d'écritures, en comparant systématiquement avec des auteurs tels Hermann Weyl ou Otto Schreier. Nous montrons en particulier combien, derrière l'apparente stabilité des termes, « voisinage », « variété » ou « groupe » prennent à partir de 1925 des sens radicalement différents.

ABSTRACT (Going global: The case of Élie Cartan, 1922–1930)

After his work on connections and generalized spaces between 1922 and 1925, Élie Cartan began laying the foundation of the topological and geometric study of Lie groups and homogeneous spaces (1925–1930). We will endeavour to establish that the emergence of global questions is but part and parcel of a thorough restructuring around the epistemological polarity between local and global, a restructuring that occurs at three levels : a theoretical level, a thematic level and a rhetorical level. This new central polarity replaced a 19th century polarity between the infinitesimal and the finite. Our chronological

Texte reçu le 14 mars 2008, révisé le 9 juin 2009, accepté le 25 octobre 2009.

R. CHORLAY, Équipe SPHERE (UMR 7219 - Université Paris 7).

Courrier électronique : renaud-chorlay@noos.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A22, 01A53, 01A58, 01A83.

Mots clefs : Cartan (Élie), Weyl, Einstein, local, global, connexion, groupe de Lie, variété.

Key words and phrases. — Cartan (Élie), Weyl, Einstein, local, global, connection, Lie group, manifold.

exposition of Cartan's work in the period between 1922 and 1930 will pay special attention to modes of writing, comparing with the works of Hermann Weyl and Otto Schreier. We shall see, in particular, that in spite of the stability of terms such as "neighbourhood", "manifold" or "group", the meaning of these words underwent a dramatic change after 1925.

Pour un mathématicien formé après 1950, dans un cadre où les notions de variété, variété fibrée, groupe et algèbre de Lie possèdent des assises solides ; dans un cadre où la classification des outils, des problèmes et des énoncés selon une polarité *local / global* jouit d'une transparente familiarité, la lecture du travail d'Élie Cartan dans les années 1920 est, sans doute, la source d'un émerveillement légitime. Entre 1922 et 1925, ce dernier contribue au renouvellement de la géométrie différentielle locale, dans le sillage des travaux de Levi-Civita, Weyl et Schouten sur le cadre géométrique de la théorie de la relativité générale. À partir de 1925, il aborde les problèmes globaux relatifs à la topologie et la géométrie des groupes de Lie, des espaces homogènes, des espaces symétriques. Il offre une première synthèse de cette moisson de résultats globaux dans sa monographie de 1930 sur *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* [Cartan 1931a].

Nous souhaitons montrer que cette lecture d'un passé pourtant proche est anachronique sur un point fondamental, et masque par là même une question historique d'importance : cette lecture repose sur une organisation systématique des connaissances mathématiques selon un couple local — global qui n'est pas celle des travaux d'Élie Cartan jusqu'en 1925 ; une organisation systématique qu'Élie Cartan, par son travail de recherche et de pédagogie, contribue à faire émerger dans la période 1925–1930. L'organisation d'une partie de l'univers mathématique — à exposer ou à conquérir — autour du couple local — global ne consiste pas en la juxtaposition d'un grand nombre d'éléments dont la quantité et les points communs « manifestes » susciteraient « naturellement » une grille de lecture en terme de local et de global. Les éléments ne suscitent pas spontanément le cadre ni n'en relèvent par nature. Les textes porteurs d'une nouvelle grille n'enregistrent pas passivement : ils organisent activement — par la sélection des éléments, leur ordre, le type de démonstration choisi, le mode d'emploi des outils les plus techniques, les grands

problèmes désignés — un univers mathématique dont l'étude historique montre qu'il n'a pas toujours été organisé ainsi. La mise en contexte de travaux montre combien *d'autres grilles de lecture* que la grille local/global ont pu être utilisées, non moins légitimement et par des mathématiciens non moins soucieux de questions d'architecture des mathématiques.

Notre objet premier n'est donc pas l'histoire des théories géométriques globales mais l'émergence de la polarité local — global dans les théories géométriques. Le cas d'Élie Cartan présente, pour cette enquête, un intérêt qui ne dérive pas de la seule valeur mathématique de ses travaux ; on le saisit mieux en esquissant la comparaison avec le travail de Hermann Weyl sur la même période. Cette comparaison s'impose : Cartan situe systématiquement ses travaux sur les espaces généralisés par rapport à ceux de Weyl sur les connexions affines, la symétrie de jauge et l'idée de géométrie purement infinitésimale ; à partir de 1925, les travaux de Cartan sur la topologie des groupes de Lie simples et semi-simples trouvent leur première impulsion dans les articles de Weyl sur la représentation linéaire des algèbres semi-simples complexes. Mais, au-delà de l'entrelacement des travaux, nos deux auteurs diffèrent par leur position historique relative à l'émergence du couple local — global. Dans son *Idée de surface de Riemann* [Weyl 1913], Weyl met en place les structures d'espace topologique et de variété analytique d'une manière que les successeurs reconnaîtront comme parfaitement rigoureuse ; le texte est de bout en bout et explicitement articulé autour du couple local — global (ou plutôt *im Kleinen* / *im Grossen*) ; les techniques de définition intrinsèque par modèle local, de recollement des morceaux ou d'utilisation de revêtements sont mises en place avec la plus grande clarté. Autrement dit, dans les années 1920, Weyl travaille dans un univers mathématique qui est déjà structuré, techniquement et conceptuellement, par une polarité local — global.

Il en va tout autrement de celui d'Élie Cartan, nous nous attacherons à l'établir dans la première partie de cet article. Nous montrerons entre autres que Cartan prolonge dans des directions inédites des théories mathématiques largement structurée, techniquement comme conceptuellement, par la polarité infinitésimal — fini. Nous souhaitons montrer que l'enrichissement — apparemment progressif — du questionnaire s'accompagne, à partir de 1925, d'une réorganisation d'ensemble de l'architecture