Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 159–200.

CONTRIBUTION À L'HISTOIRE DE LA THÉORIE DES GÉODÉSIQUES AU XIX^e SIÈCLE [1]

Philippe Nabonnand (*)

Résumé. — La théorie des géodésiques d'une surface se situe à l'intersection de plusieurs domaines : la géométrie différentielle, le calcul des variations, la théorie des équations différentielles et la mécanique. Au début du xix^e siècle, la théorie locale des géodésiques est un exemple bien connu d'application des méthodes infinitésimales à la géométrie. Cependant, l'équation des géodésiques est trop difficile pour être résolue et les méthodes directes ne donnent que peu d'informations sur le comportement global des géodésiques d'une surface donnée.

Avec Jacobi, Sturm et Liouville, l'apparition d'un point de vue qualitatif dans l'étude des solutions d'une équation différentielle permet une analyse globale et qualitative du comportement des géodésiques d'une surface, en particulier grâce à l'étude du lieu conjugué et du lieu de coupure ainsi que par la considération de l'influence de conditions topologiques ou géométriques globales comme le signe de la courbure.

Abstract. — A contribution to the history of geodesics during the nineteenth century. The theory of geodesics on a surface is a subject standing at the intersection of various fields : differential geometry, the calculus of variations, the theory of differential equations, and mechanics. At the outset of the 19th century, the local theory of geodesics was well known as an instance of the application of the methods of the infinitesimal calculus to geometry. The equations for geodesics, however, were generally unamenable to easy resolution; and direct methods of treatment yielded but little of interest, as regards the global behaviour of geodesics on a given surface.

With the work of Jacobi, Sturm, and Liouville, the emergence of a qualitative approach in the study of the resolution of differential equations allowed for a global, and qualitative, treatment of geodesics on a surface — most conspicuously through the study of the conjugate locus, and of the cut locus, and by the examination of the incidence of such global topological or geometrical conditions as the sign, positive or negative, of the curvature.

[1] Une partie de ce travail a été exposée au congrès « Henri Poincaré » organisé par les professeurs G. Heinzmann et J.L. Greffe (Nancy, 14–18 mai 1994).

(*) Texte reçu le 14 décembre 1994, révisé le 1^{er} juin 1995.
Philippe Nabonnand, ACERHP, UMR C9949 du CNRS, Université de Nancy 2, UFR de Mathématiques et d'Informatique, c.o. 75, 54037 Nancy Cedex (France).
Courrier électronique : nabonnan@plg.u-nancy.fr.

INTRODUCTION

Dès son origine, le problème des géodésiques[2] est intimement lié à l'apparition du calcul différentiel et aux applications des méthodes infinitésimales à la géométrie. En 1697, Jean Bernoulli pose le problème de déterminer le chemin le plus court parmi ceux joignant deux points d'une surface. Dans une lettre à L'Hospital, il annonce avoir déterminé l'équation différentielle de ces chemins. En 1698, son frère Jacques montre que les géodésiques d'un cylindre ou d'un cône s'appliquent sur les lignes droites lorsque l'on développe la surface sur un plan. Euler revient à plusieurs reprises sur cette question et redécouvre l'équation différentielle des géodésiques [Euler 1732]. En particulier, dans son traité de mécanique, *Mechanica sive motus scientia analytice* [Euler 1736], il montre qu'en l'absence de forces, le chemin d'un point matériel sur une surface est une géodésique[3].

La théorie des géodésiques est donc à l'intersection de nombreux domaines qui ont tous été profondément transformés sinon initiés par la révolution analytique du XVII^e siècle : la théorie des surfaces, la théorie des équations différentielles, le calcul des variations et la mécanique.

Durant le XIX^e siècle, la question des géodésiques est intrinsèquement liée à la mécanique[4] :

---

[2] Le terme de géodésique apparaît pour la première fois dans le *Traité de mécanique céleste* de Laplace : « *Ainsi les lignes tracées par les mesures géodésiques ont la propriété d'être les plus courtes que l'on puisse mener sur la surface du sphéroïde, entre deux de leurs points quelconques ;* [...] *elles seraient décrites par un mobile mû uniformément dans cette surface.* [...] *nous désignerons cette ligne sous le nom de* ligne géodésique » [Laplace 1799, p. 129, 131]. K. Reich [1973, p. 308-309] indique, que dans un mémoire de géodésie [1838, p. 333], l'astronome Bessel, par ailleurs proche ami de Gauss, utilise pour désigner les lignes les plus courtes d'un ellipsoïde de révolution le terme de ligne géodésique (*geodätische Linie*). Jacobi [1839, p. 267] qui à cette époque était, comme Bessel, professeur à l'université de Königsberg, puis Liouville [1844, p. 401] reprennent cette dénomination.

[3] « *quam corpus super superficie quacunque ABC motum describit, est linea brevissima, quae inter terminos D et M duci potest, si scilicet corpus in vacuo moveatur et a nullis potentiis sollicitetur* » (le mouvement que décrit un corps sur une surface ABC est la ligne la plus courte que l'on peut mener du point D au point M, si le corps, bien entendu, se meut dans le vide et n'est soumis à aucune force) [Euler 1736, p. 23].

[4] Sur la question plus générale des liens entre la mécanique et la géométrie différentielle au XIX^e siècle, Lützen [1993] insiste sur l'importance de la géométrisation du principe de moindre action et en indique les conséquences sur la conception de la géométrie, en particulier l'acceptation graduelle des espaces de dimension supérieure à trois.

«*La ligne géodésique pour une surface est celle que décrirait, à la suite d'une impulsion quelconque, un mobile assujetti à demeurer sur la surface et dont le mouvement ne serait altéré par aucune force accélératrice*» [Liouville 1844, p. 401].

Même s'ils ne sont pas directement concernés par les questions de dynamique, la plupart des auteurs déduisent l'équation des géodésiques à partir des équations de Lagrange, des équations de Hamilton ou du principe de moindre action. Les chapitres consacrés à la théorie des géodésiques du traité de géométrie de Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, sont exemplaires de ce point de vue. Darboux expose ainsi «*une méthode élégante de recherche des lignes géodésiques*» qui consiste à déterminer les familles de courbes parallèles, c'est-à-dire les familles de courbes dont les trajectoires sont perpendiculaires aux lignes géodésiques. Cette méthode conduit à une équation aux dérivées partielles que l'on peut aussi établir en utilisant les techniques du calcul des variations. Cette équation obtenue, «*on pourra traiter le problème des lignes géodésiques comme tout autre problème de Mécanique et lui appliquer, sans aucune modification, les méthodes d'Hamilton et Jacobi*» [Darboux, *Leçons* 2, p. 450][5].

D'autre part, la question des géodésiques apparaît dans des travaux de mécanique comme cas particulier ou illustration ([Jacobi 1843], [Liouville 1846b], [Thomson et Tait 1867], [Hadamard 1897a]).

Ainsi, Poincaré justifie l'intérêt de son travail sur les géodésiques des surfaces convexes, dans l'introduction de son article, par l'extrême complexité du problème des trois corps et la nécessité de se confronter à un problème qui, bien que plus simple, garderait la quintessence du problème initial :

«*A côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où l'on rencontrerait cette difficulté principale, mais où l'on serait affranchi de toutes les difficultés secondaires. Ce problème*

[5] Darboux consacre trois chapitres aux liens entre dynamique et théorie des géodésiques. Dans celui intitulé « Analogie entre la dynamique des mouvements dans le plan et la théorie des lignes géodésiques», il montre que le premier point de vue des familles de courbes parallèles correspond au principe de moindre action et que le point de vue variationnel est lié au principe de Hamilton [Darboux, *Leçons* 2, p. 452–477].

est tout trouvé, c'est celui des lignes géodésiques d'une surface ; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique » [Poincaré 1905, p. 38].

Poincaré considère donc la question des géodésiques comme une épure du plus vaste et plus complexe problème général de la dynamique et justifie cette démarche par la nécessité de dégager les aspects géométriques de ce problème.

D'un autre côté, la question des géodésiques est intimement liée à l'analyse de l'équation des géodésiques et les résultats obtenus pendant la première moitié du XIX^e^ siècle sont donc essentiellement locaux[6]. L'apparition des méthodes qualitatives dans la théorie des équations différentielles, les débuts de la topologie et les interrogations plus fines sur la question des minima des fonctionnelles permettront l'émergence d'un questionnement plus global du comportement des géodésiques des surfaces. En effet, les techniques d'analyse qualitative des équations différentielles appliquées à l'équation des géodésiques permettent de décrire globalement les géodésiques d'une surface, en fonction d'hypothèses topologiques ou géométriques.

L'étude des géodésiques des surfaces du deuxième degré sert de révélateur de l'évolution des points de vue sur la question plus générale des géodésiques. La résolution de l'équation des géodésiques sur de telles surfaces en fonction d'intégrales abéliennes ne se traduit pourtant que par relativement peu de résultats géométriques et illustre *a contrario* les limites de l'approche directe. Après 1855, l'étude des géodésiques des surfaces du second degré disparaît quasiment[7] pour renaître vers 1880 avec des travaux traversés par les intérêts nouveaux pour une problématique globale et la prise en compte des propriétés topologiques et géométriques.

[6] Les géodésiques apparaissent dans une perspective plus globale dans le problème de la représentation géodésique de deux surfaces l'une sur sur l'autre, c'est-à-dire l'étude des correspondances point par point entre deux surfaces de telle manière que chaque ligne géodésique de l'une s'applique sur une ligne géodésique de l'autre. Ce problème est en fait un cas particulier de la question de la construction des cartes géographiques. Cet aspect de la question sera traité dans un article en préparation sur l'histoire des coordonnées curvilignes et des représentations des surfaces.

[7] Une des rares références sur la question des géodésiques des surfaces entre 1855 et 1879 est un article de Weierstrass qui ne comporte d'ailleurs que très peu de résultats nouveaux [Weierstrass 1861].

LES *DISQUITIONES GENERALES CIRCA SUPERFICIES CURVAS* DE GAUSS

Gauss étudie la théorie des lignes les plus courtes sur les surfaces dans son célèbre mémoire *Disquitiones generales circa superficies curvas* [Gauss 1828]. Il s'intéresse essentiellement aux propriétés locales et globales de la courbure d'une surface munie d'une métrique générale

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2. \tag{1}$$

Gauss donne une interprétation géométrique des coefficients E, F et G. Pour cela, il considère les deux systèmes de courbes définis par $u = \mathrm{C^{te}}$ et $v = \mathrm{C^{te}}$. Chaque point de la surface est repéré comme intersection de deux lignes particulières de ces systèmes. La distance entre les points de coordonnées (u, v) et $(u + \mathrm{d}u, v)$ est donc égale à $\mathrm{d}u$ et la distance entre les points de coordonnées (u, v) et $(u, v + \mathrm{d}v)$ est égale à $\mathrm{d}v$. De plus, si ω désigne l'angle entre les lignes des deux systèmes, on a $\cos\omega = F/\sqrt{EG}$.

Dans ce cadre, Gauss étudie certaines propriétés des géodésiques. Il commence par poser le problème du plus court chemin en termes variationnels et établit que si x, y et z sont les coordonnées d'un point d'une géodésique, si $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ désignent la différence infinitésimale des coordonnées dans le sens de la courbe et si δx, δy et δz désignent la différence des coordonnées dans le sens de la variation, on a[8]

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0, \quad P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0,$$

où P, Q et R sont respectivement proportionnels à

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}, \quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}, \quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}\cdot$$

Gauss interprète géométriquement ces formules en considérant sur une sphère les points λ et L, respectivement définis par la direction tangente à la courbe et par la direction de la normale principale de la courbe. Alors, si ξ, η et ζ désignent les coordonnées de λ et X, Y et Z celles de L,

[8] Ces équations reviennent à exprimer que l'accélération de la géodésique définie par les grandeurs P, Q, R est normale au plan tangent de la surface, déterminé par les directions de la courbe et de la variation.