Astérisque

B. HELFFER
SYLVAIN GALLOT
ALBERT POLOMBO
LIONEL BÉRARD BERGERY
GENEVIÈVE AVEROUS
ANNIE DESCHAMPS
EUGENIO CALABI
J.-P. BOURGUIGNON
SHING TUNG YAU
J. P. EZIN

Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi

Astérisque, tome 58 (1978)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__58__1_0>

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE CLASSE DE CHERN ET COURBURE DE RICCI :
PREUVE DE LA CONJECTURE DE CALABI

Séminaire Palaiseau Printemps 1978

AVANT-PROPOS

Ces notes rendent compte d'une façon détaillée d'un séminaire sur la preuve de la conjecture de Calabi qui s'est tenu à Palaiseau au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 169) de Mars à Juin 1978.

En 1954, dans [3] E. Calabi a écrit :

"Let M^n be a closed, n-dimensional complex manifold. We assume that M^n admits at least one Kähler metric $g_{\alpha\bar\beta}$; its associated closed exterior form $\omega = \sqrt{-1}\, g_{\alpha\bar\beta}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar z^{\beta}$ determines a real cohomology class, called the principal class of the metric. Consider the space Ω of all infinitely differentiable Kähler metrics in M^n with the same principal class ; the topology of Ω is defined by the L^2-topology of the tensorial components of metrics in Ω in compact subregions of coordinate domains. If $R_{\alpha\bar\beta}$ is the Ricci tensor of any metric in Ω , then the Ricci form $\sqrt{-1}\, R_{\alpha\bar\beta}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar z^{\beta}$ is closed and its cohomology class is $2\pi c_1$ (the first Chern class of M).
THEOREM 1.- Given in M^n any real, closed infinitely differentiable exterior form Σ of type (1,1) and cohomologous to $2c_1$, there exists exactly one Kähler metric in Ω whose Ricci form equals Σ ."

A cela fait suite un plan de démonstration. Un an plus tard, E. Calabi a ajouté dans [4] :

"While the proof of this result is not complete, we feel justified in assuming the truth of the statement for several concurrent intuitive reasons. This...gap...makes the result...depend on the conjecture that <u>a compact Kähler manifold admits a Kähler metric with any assigned, positive differentiable volume element</u>."

La traduction analytique de la conjecture est une équation de Monge-Ampère complexe, équation elliptique non linéaire. Il me semble important de souligner que l'équation porte sur une fonction, à savoir le potentiel par rapport à la métrique kählérienne donnée de la métrique kählérienne cherchée. Par contraste l'étude plus générale, dans le cadre de la géométrie riemannienne, de l'application qui, à un deux-tenseur métrique, associe son deux-tenseur de Ricci est beaucoup plus difficile car il s'agit alors de résoudre une équation portant sur des champs de deux-tenseurs.

La solution de cette conjecture, obtenue en 1976 par S. T. Yau, pose à nouveau le problème de la place de la géométrie kählérienne en géométrie. Pour certains ce ne serait pas une théorie à part entière, mais seulement un hybride de la théorie des variétés complexes et de la géométrie riemannienne. Pour d'autres, les méthodes transcendantes telles qu'elles se sont développées dans le cadre de la géométrie kählérienne depuis Hodge restent des méthodes privilégiées pour attaquer la géométrie analytique. Il faut bien dire que la preuve de la conjecture de Calabi apporte des arguments aux seconds, puisque les contraintes globales sur la courbure de Ricci d'une métrique kählérienne se limitent à la condition cohomologique d'être un multiple de la première classe de Chern ; c'est un grand pas dans la compréhension de la géométrie différentielle des variétés kählériennes compactes.

Cette conjecture a intéressé de nombreux analystes et géomètres différentiels. Pourtant, à part les résultats initialement obtenus par E. Calabi dans [4] (résolution au voisinage d'une forme de Ricci d'une métrique kählérienne et unicité à classe de Kähler fixée) repris par T. Ochiai en 1974, il a fallu attendre 1967 pour que T. Aubin établisse dans [1] un cas particulier de la conjecture en supposant de plus que la courbure bisectionnelle holomorphe est positive ou nulle. Ce résultat n'était pas vraiment déterminant pour la conjecture (on pense en effet, et on sait en petites dimensions, que l'espace projectif complexe est la seule variété kählérienne à courbure bisectionnelle holomorphe positive), mais certaines estimées établies dans [1] ont servi par la suite à T. Aubin pour la preuve qu'il a donnée au printemps 1976 d'une conjecture voisine relative à l'existence de métriques de Kähler-Einstein (voir [2] et exposé n° V pour des détails). C'est dans l'automne 1976 que S. T. Yau a prouvé la