

Astérisque

B. HELFFER

SYLVAIN GALLOT

ALBERT POLOMBO

LIONEL BÉRARD BERGERY

GENEVIÈVE AVEROUS

ANNIE DESCHAMPS

EUGENIO CALABI

J.-P. BOURGUIGNON

SHING TUNG YAU

J. P. EZIN

**Première classe de Chern et courbure de Ricci :
preuve de la conjecture de Calabi**

Astérisque, tome 58 (1978)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__58__1_0

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
AVANT-PROPOS.....	3
Exposé n°I par Bernard HELFFER	
RAPPELS SUR LES ESPACES FONCTIONNELS UTILES AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	9
§ 1 <i>Espaces de Hölder</i>	10
§ 2 <i>Espaces $L^p(\Omega)$</i>	11
§ 3 <i>Espaces $W^{m,p}(\Omega)$</i>	12
§ 4 <i>Interpolation et espaces fractionnaires</i>	19
Exposé n°II par Jean Pierre EZIN	
ESTIMÉES DE SCHAUDER POUR DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES	23
§ 0 <i>Introduction</i>	24
§ 1 <i>Notations et résultats préliminaires</i>	25
§ 2 <i>Estimées de Schauder intérieures</i>	30
§ 3 <i>Estimées de Schauder sur les variétés compactes</i>	33
Exposé n°III par Sylvain GALLOT	
INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES	35
§ 1 <i>Introduction</i>	36
§ 2 <i>Variétés complexes</i>	38
§ 3 <i>Variétés hermitiennes</i>	40
§ 4 <i>Variétés kählériennes</i>	43
Exposé n°IV par Albert POLOMBO	
CLASSES DE CHERN	51
Première partie : Point de vue de la topologie	
§ 1 <i>Fibrés vectoriels complexes</i>	52
§ 2 <i>Définition axiomatique des classes de Chern</i>	55
§ 3 <i>Une propriété des fibrés en droites</i>	57
Deuxième partie : Point de vue de la géométrie	
§ 4 <i>Connexion sur un fibré vectoriel complexe</i>	62
§ 5 <i>La classe c_1</i>	68
§ 6 <i>Une application</i>	73
Exposé n°V par Lionel BÉRARD BERGERY	
ÉNONCÉ DES THÉORÈMES ET MISE EN ÉQUATION	77
§ 1 <i>Introduction et rappel</i>	78
§ 2 <i>Énoncé du premier théorème</i>	80
§ 3 <i>Conjectures voisines</i>	82
§ 4 <i>Mise en équation du théorème I</i>	83
§ 5 <i>Mise en équation du théorème II^- et de la question II^+</i>	85
Exposé n°VI par Lionel BÉRARD BERGERY	
DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES : UNICITÉ, MÉTHODE DE CONTINUITÉ, SCHEMA DE LA DÉMONSTRATION D'EXISTENCE	89
§ 1 <i>Unicité de la solution de l'équation I</i>	91
§ 2 <i>Unicité de la solution de l'équation II^-</i>	94

	§ 3	<i>Méthode de continuité pour la résolution de I</i>	94
	§ 4	<i>Méthode de continuité pour la résolution de II^+</i>	99
	§ 5	<i>Utilisation des équations dérivées de (*) et (**)</i>	101
Exposé n°VII	par Geneviève AVEROUS et Annie DESCHAMPS		
	ESTIMÉES UNIFORMES DES SOLUTIONS		103
	§ 1	<i>Enoncés des estimées</i>	104
	§ 2	<i>Quelques propriétés des potentiels kählériens</i>	107
	§ 3	<i>Les lemmes non linéaires</i>	110
Exposé n°VIII	par Bernard HELFFER		
	ESTIMÉES DU SECOND ORDRE		113
	§ 1	<i>Introduction. Présentation des résultats</i>	114
	§ 2	<i>Quelques formules de géométrie kählérienne locale</i>	116
	§ 3	<i>Preuve du Lemme 0.4</i>	120
Exposé n°IX	par Eugenio CALABI		
	CONSTRUCTION DE MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN		129
Exposé n°X	par Jean Pierre BOURGUIGNON		
	SUR LA DEUXIÈME CONJECTURE DE CALABI		135
	§ 1	<i>Les variétés complexes à première classe de Chern définie</i>	136
	§ 2	<i>Fonctions propres du laplacien et transformations holomorphes</i>	139
	§ 3	<i>Nouvelle formulation de II^+</i>	145
Exposé n°XI	par Lionel BÉRARD BERGERY		
	ESTIMÉES DU 3ème ORDRE		149
	§ 1	<i>Introduction</i>	150
	§ 2	<i>Réduction du problème</i>	150
	§ 3	<i>Commutation de dérivées covariantes</i>	152
	§ 4	<i>Démonstration du lemme 2.1</i>	156
Exposé n°XII	par Shing Tung YAU		
	MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN SUR LES VARIÉTÉS OUVERTES		163
	ABSTRACT		169

PREMIÈRE CLASSE DE CHERN ET COURBURE DE RICCI :
PREUVE DE LA CONJECTURE DE CALABI

Séminaire Palaiseau Printemps 1978

AVANT-PROPOS

Ces notes rendent compte d'une façon détaillée d'un séminaire sur la preuve de la conjecture de Calabi qui s'est tenu à Palaiseau au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 169) de Mars à Juin 1978.

En 1954, dans [3] E. Calabi a écrit :

"Let M^n be a closed, n -dimensional complex manifold. We assume that M^n admits at least one Kähler metric $g_{\alpha\bar{\beta}}$; its associated closed exterior form $\omega = \sqrt{-1} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ determines a real cohomology class, called the principal class of the metric. Consider the space Ω of all infinitely differentiable Kähler metrics in M^n with the same principal class; the topology of Ω is defined by the L^2 -topology of the tensorial components of metrics in Ω in compact subregions of coordinate domains. If $R_{\alpha\bar{\beta}}$ is the Ricci tensor of any metric in Ω , then the Ricci form $\sqrt{-1} R_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ is closed and its cohomology class is $2\pi c_1$ (the first Chern class of M).

THEOREM 1.- Given in M^n any real, closed infinitely differentiable exterior form Σ of type (1,1) and cohomologous to $2\pi c_1$, there exists exactly one Kähler metric in Ω whose Ricci form equals Σ ."

A cela fait suite un plan de démonstration. Un an plus tard, E. Calabi a ajouté dans [4] :

"While the proof of this result is not complete, we feel justified in assuming the truth of the statement for several concurrent intuitive reasons. This...gap...makes the result...depend on the conjecture that a compact Kähler manifold admits a Kähler metric with any assigned, positive differentiable volume element."

La traduction analytique de la conjecture est une équation de Monge-Ampère complexe, équation elliptique non linéaire. Il me semble important de souligner que l'équation porte sur une fonction, à savoir le potentiel par rapport à la métrique kählérienne donnée de la métrique kählérienne cherchée. Par contraste l'étude plus générale, dans le cadre de la géométrie riemannienne, de l'application qui, à un deux-tenseur métrique, associe son deux-tenseur de Ricci est beaucoup plus difficile car il s'agit alors de résoudre une équation portant sur des champs de deux-tenseurs.

La solution de cette conjecture, obtenue en 1976 par S. T. Yau, pose à nouveau le problème de la place de la géométrie kählérienne en géométrie. Pour certains ce ne serait pas une théorie à part entière, mais seulement un hybride de la théorie des variétés complexes et de la géométrie riemannienne. Pour d'autres, les méthodes transcendentes telles qu'elles se sont développées dans le cadre de la géométrie kählérienne depuis Hodge restent des méthodes privilégiées pour attaquer la géométrie analytique. Il faut bien dire que la preuve de la conjecture de Calabi apporte des arguments aux seconds, puisque les contraintes globales sur la courbure de Ricci d'une métrique kählérienne se limitent à la condition cohomologique d'être un multiple de la première classe de Chern ; c'est un grand pas dans la compréhension de la géométrie différentielle des variétés kählériennes compactes.

Cette conjecture a intéressé de nombreux analystes et géomètres différentiels. Pourtant, à part les résultats initialement obtenus par E. Calabi dans [4] (résolution au voisinage d'une forme de Ricci d'une métrique kählérienne et unicité à classe de Kähler fixée) repris par T. Ochiai en 1974, il a fallu attendre 1967 pour que T. Aubin établisse dans [1] un cas particulier de la conjecture en supposant de plus que la courbure bisectionnelle holomorphe est positive ou nulle. Ce résultat n'était pas vraiment déterminant pour la conjecture (on pense en effet, et on sait en petites dimensions, que l'espace projectif complexe est la seule variété kählérienne à courbure bisectionnelle holomorphe positive), mais certaines estimées établies dans [1] ont servi par la suite à T. Aubin pour la preuve qu'il a donnée au printemps 1976 d'une conjecture voisine relative à l'existence de métriques de Kähler-Einstein (voir [2] et exposé n° V pour des détails). C'est dans l'automne 1976 que S. T. Yau a prouvé la