

Astérisque

LAURENT FARGUES

ELENA MANTOVAN

**Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et
correspondances de Langlands locales**

Astérisque, tome 291 (2004)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__291__R1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__291__R1_0)

© Société mathématique de France, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**VARIÉTÉS DE SHIMURA,
ESPACES DE RAPOPORT-ZINK
ET CORRESPONDANCES
DE LANGLANDS LOCALES**

**Laurent Fargues
Elena Mantovan**

L. Fargues

UMR C.N.R.S. 8628, Université Paris Sud/CNRS, Bâtiment 425, 91405 Orsay.

E-mail : `laurent.fargues@math.u-psud.fr`

E. Mantovan

Department of Mathematics, 970 Evans Hall 3840, University of California,
Berkeley, CA 94720-3840, U.S.A.

E-mail : `mantovan@math.berkeley.edu`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G18, 11Fxx, 14G35, 14L05, 14G22.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, groupes p -divisibles, espaces de Rapoport-Zink, correspondances de Langlands, cohomologie étale des espaces rigides.

VARIÉTÉS DE SHIMURA, ESPACES DE RAPOPORT-ZINK ET CORRESPONDANCES DE LANGLANDS LOCALES

Laurent Fargues, Elena Mantovan

Résumé. — Ce volume contient deux articles. Tous deux traitent de généralisations des résultats de Michael Harris et Richard Taylor sur la cohomologie des variétés de Shimura de type P.E.L. de signature $(1, n - 1)$ ainsi que celle des espaces de Lubin-Tate. Ils reposent sur les travaux de Robert Kottwitz concernant ces mêmes variétés en signature quelconque, ainsi que ceux de Michael Rapoport et Thomas Zink sur les espaces de modules de groupes p -divisibles associés, espaces qui généralisent les espaces de Lubin-Tate ainsi que ceux de Drinfeld.

Dans le premier article il est démontré que la cohomologie étale ℓ -adique de certains de ces espaces de modules de groupes p -divisibles « supersinguliers » réalise des correspondances de Langlands locales. Pour cela l'auteur y établit une formule reliant la cohomologie de ces espaces à celle de la partie « supersingulière » d'une variété de Shimura. Il démontre ensuite que la partie supercuspidale de la cohomologie de ces variétés est entièrement contenue dans celle de la partie « supersingulière ».

Le second article relie la cohomologie d'une strate de Newton de la variété de Shimura, par exemple la strate « supersingulière », à la cohomologie des espaces de modules locaux de groupes p -divisibles associés et à la cohomologie de variétés globales en caractéristique positive appelées variétés d'Igusa qui généralisent les courbes d'Igusa associées aux courbes modulaires.

Abstract (Shimura varieties, Rapoport-Zink spaces and local Langlands correspondences)

This volume contains two articles. Both deal with generalizations of Michael Harris' and Richard Taylor's work on the cohomology of P.E.L. type Shimura varieties of signature $(1, n - 1)$ and on the cohomology of Lubin-Tate spaces. They are based on the work of Robert Kottwitz on those varieties in the general signature case, and on the work of Michael Rapoport and Thomas Zink on moduli spaces of p -divisible groups generalizing the one of Lubin-Tate and Drinfeld.

In the first article it is proved that the ℓ -adique étale cohomology of some of those "supersingular" moduli spaces of p -divisible groups realizes some cases of local Langlands correspondences. For this the author establishes a formula linking the cohomology of those spaces to the one of the "supersingular" locus of a Shimura variety. Then he proves that the supercuspidal part of the cohomology of those varieties is completely contained in the one of the "supersingular" locus.

The second article links the cohomology of a Newton stratum of the Shimura variety, for example the "supersingular" stratum, to the cohomology of the attached local moduli space of p -divisible groups and to the cohomology of some global varieties in positive characteristic named Igusa varieties that generalize the classical Igusa curves attached to modular curves.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	ix
Références	xii

L. FARGUES — Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales	1
Introduction	2
Motivation générale	2
Espaces de Rapoport-Zink	2
Esquisse des résultats	3
Conjectures de Kottwitz	3
Énoncés précis	4
Quelques rappels sur la méthode de Harris, Taylor et Boyer	5
L'approche utilisée	6
Description des différentes parties	8
Chapitre 1. Variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées	14
1.1. Donnée de Shimura de type P.E.L.	14
1.2. Modèles entiers	21
Chapitre 2. Espaces de Rapoport-Zink	24
2.1. Isocristaux munis de structures additionnelles : le cas de GL_n	24
2.2. Donnée locale de Rapoport-Zink	28
2.3. Espaces de Rapoport-Zink associés	29
2.4. Un théorème de finitude pour l'action de J_b	44
Chapitre 3. Uniformisation des variétés de Shimura de type P.E.L.	54
3.1. Uniformisation de Rapoport-Zink	55
3.2. Uniformisation rigide	58
Chapitre 4. Une suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'uniformisation de Rapoport-Zink	62
4.1. Cohomologie étale ℓ -adique des espaces analytiques rigides	62
4.2. Cohomologie ℓ -adique équivariante des espaces analytiques rigides ...	67

4.3. Lien avec la suite spectrale de Rapoport-Zink ([66])	70
4.4. Cohomologie de $\check{\mathcal{M}}_K$	71
4.5. Une suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'uniformisation de Rapoport-Zink	76
4.6. Application à la strate basique : « une formule de Matsushima p -adique »	94
4.7. Lien avec les variétés d'Igusa	96
Chapitre 5. Formule de Lefschetz sur la fibre spéciale	98
5.1. Rappels sur les correspondances cohomologiques	98
5.2. Le théorème de Fujiwara	105
5.3. Spécialisation des correspondances cohomologiques algébriques	106
5.4. Cycles évanescents analytiques rigides	110
5.5. Correspondances cohomologiques analytiques rigides	117
5.6. Spécialisation des correspondances cohomologiques analytiques rigides	119
5.7. Compatibilité entre les spécialisations algébriques et analytiques rigides	120
5.8. Résumé des différentes fonctorialités	121
5.9. Des coefficients de torsion aux coefficients ℓ -adique	122
5.10. Formule des traces générale	128
5.11. Modèles des variétés de Shimura et des espaces de Rapoport-Zink en niveau parahorique	131
5.12. La formule des traces pour la cohomologie des strates d'une variété de Shimura de type P.E.L.	134
Chapitre 6. Formule de Lefschetz sur la fibre générique	140
6.1. Généralités sur les points fixes sur la fibre générique	140
6.2. Points fixes isolés	145
6.3. Le cas des variétés de Shimura de type P.E.L.	147
6.4. Formule de Lefschetz	149
Chapitre 7. Contribution de la cohomologie de la strate basique	151
7.1. Caractérisation des éléments de $\text{Groth}(G(\mathbf{A}_f)) \times W_{E_\nu}$ par leurs traces	151
7.2. Contribution de la cohomologie de la strate basique	155
Chapitre 8. Application à la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink de type E.L. et P.E.L.	162
8.1. Espaces de type E.L. non ramifiés	162
8.2. Espaces de type P.E.L. non ramifiés	168
Appendice A. Résultats concernant les représentations automorphes des groupes unitaires, leur cohomologie et les représentations galoisiennes associées	171
A.1. Hypothèses générales	171
A.2. Résultats de Clozel, Harris et Labesse sur la pureté de la cohomologie des représentations automorphes	172
A.3. Résultats de Clozel, Harris et Labesse sur le changement de base quadratique stable	173
A.4. Résultats de Harris et Labesse sur la comparaison entre la formule des traces pour deux groupes unitaires formes intérieures	174

A.5. Résultats de Clozel, Harris, Kottwitz et Taylor sur les représentations galoisiennes	175
A.6. Résultat de Kottwitz sur les représentations galoisiennes obtenues dans la cohomologie des variétés de Shimura en une place de bonne réduction ..	175
A.7. Application aux représentations galoisiennes obtenues dans la cohomologie des variétés de Shimura de type P.E.L. de signature quelconque	176
Appendice B. Résultats concernant les types associés aux représentations des groupes p -adiques	184
B.1. Quelques propriétés générales des types associés aux représentations supercuspidales des groupes p -adiques ([10])	184
B.2. Types pour GL_n	185
B.3. Types pour les groupes unitaires non ramifiés	185
Appendice C. Résultats de Rogawski sur $U(3)$	187
C.1. Notations	187
C.2. Transfert endoscopique local	187
C.3. Changement de base local	188
C.4. Classification des L-paquets supercuspidaux de G	188
C.5. Correspondance de Langlands locale pour les L-paquets supercuspidaux de G	189
C.6. Classification des représentations supercuspidales de G	190
C.7. Passage de $U(3)$ à $GU(3)$	190
Appendice D. Espaces adiques et espaces analytiques	192
D.1. Différents espaces	192
D.2. Différents morphismes étales	194
Références	196
E. MANTOVAN — <i>On certain unitary group Shimura varieties</i>	201
1. Introduction	202
2. Preliminaries	208
2.1. Shimura varieties	209
2.2. Newton polygon stratification	215
2.3. Some distinguished Barsotti-Tate groups	218
2.4. Slope filtration	221
2.5. Rapoport-Zink spaces	222
2.6. Full set of sections	230
2.7. Vanishing cycles	231
3. Igusa varieties	235
3.1. The general case	235
3.2. Igusa varieties over the central leaves	236
3.3. The action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the Igusa varieties	239
3.4. The groups acting on the Igusa varieties	240
3.5. The cohomology of the Igusa varieties	246
4. A system of covers of the Newton polygon strata	249
4.1. The action of Frobenius on the slope filtration	249
4.2. The morphisms π_N	251

4.3. The morphism Π on $\overline{\mathbb{F}}_p$ -points	255
4.4. The leaves are closed	263
5. Group action on cohomology	266
5.1. The cohomology of étale sheaves with the action of a group	266
5.2. The étale sheaf $\mathcal{F}$	271
5.3. The cohomology of the Newton polygon strata	278
5.4. Using Künneth formula	279
6. Formally lifting to characteristic zero	282
6.1. From $\overline{\mathbb{F}}_p$ -schemes to formal $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\text{nr}}$ -schemes	283
6.2. The morphisms $\pi_N(t)$	284
6.3. The morphisms $\pi_N[t, V]$	290
6.4. The morphisms $\widehat{y}_N$	291
7. Shimura varieties with level structure at p	292
7.1. Integral models for Shimura varieties with level structure at p	293
7.2. Integral models for Rapoport-Zink spaces with level structure	298
7.3. Comparing the spaces $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\text{nr}}$ and $\mathcal{M}_{M,g}$	302
7.4. The vanishing cycles sheaves on Shimura varieties	304
8. The cohomology of Shimura varieties	312
8.1. The Newton polygon decomposition	312
8.2. The cohomology of the Rapoport-Zink spaces	317
8.3. An equality in the Grothendieck group	327
References	330

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les deux articles de ce volume trouvent leurs origines les plus récentes dans les travaux de Kottwitz ([2]), Rapoport-Zink ([3]) et Harris-Taylor ([1]).

L'idée est la suivante pour le groupe $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$. Soit

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N))$$

une forme modulaire holomorphe cuspidale de poids $k \geq 2$, propre pour les opérateurs de Hecke hors N et primitive. La forme $f(z)dz^{k/2}$ définit une classe dans la cohomologie de de Rham à coefficients de la courbe modulaire $X_0(N)$ (isomorphisme d'Eichler-Shimura). Appliquant les théorèmes de comparaison entre théories cohomologiques on en déduit une classe de cohomologie dans la cohomologie étale ℓ -adique à coefficients de $X_0(N)$. Celle-ci est propre pour les opérateurs de Hecke hors N et définit une représentation galoisienne

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

telle que $\forall p \nmid Nl$ ρ_f soit non-ramifiée en p et

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p; \rho_f) = a_p$$

où Frob_p désigne une substitution de Frobenius en p . Une démonstration de cette égalité consiste à appliquer une formule des traces de Lefschetz à la réduction modulo p de modèles entiers lisses de $X_0(N)$ sur $\mathbb{Z}_p$ puis à la comparer à la formule des traces de Selberg.

A f est associée une forme automorphe $\phi \in L^2_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/K_0(N))$ dont les itérés par les opérateurs de Hecke en toutes les places engendrent une représentation automorphe

$$\Pi = \Pi_\infty \otimes \bigotimes_p \Pi_p$$

où l'égalité de traces ci-dessus signifie que $\forall p \nmid Nl$, la représentation Π_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est associée à $\rho_{f|_{D_p}}$ via la correspondance de Langlands non-ramifiée (les valeurs