

Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE

Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques

Astérisque, tome 295 (2004), p. 1-115

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__295__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__295__1_0)

© Société mathématique de France, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ARITHMÉTIQUE DES REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES p -ADIQUES

par

Jean-Marc Fontaine

Résumé. — Soient K un corps p -adique, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K , C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p -adique, B_{dR} le corps des périodes p -adiques, $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$. On commence par expliquer les calculs de Sen et Tate sur la cohomologie galoisienne continue de C et de $GL_h(C)$. On donne ensuite une classification, essentiellement due à Sen, des C -représentations de G_K (c'est-à-dire des C -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K) puis des B_{dR} -représentations de G_K . On applique ceci aux représentations p -adiques de G_K , puis on décrit les principaux faits de la théorie des représentations p -adiques semi-stables. On termine en prouvant que les seuls endomorphismes $\mathbb{Q}_p$ -linéaires continus G_K -équivariants de C sont les homothéties par des éléments de K , puis que, lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie des C -représentations de G_K dans celle des Banach p -adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

Table des matières

0. Introduction	2
1. Le corps C et sa cohomologie continue	10
2. C -représentations : la théorie de Sen	25
3. B_{dR} -représentations	45
4. Généralités sur les représentations p -adiques	73
5. Représentations semi-stables et (φ, N) -modules filtrés	79
6. L'action de C perdue et retrouvée	107
Références	113

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F80, 11F85, 11S15, 11S20, 11S25.

Mots clefs. — Corps locaux, périodes p -adiques, représentations galoisiennes.

0. Introduction

Dans ce texte on s'intéresse aux représentations p -adiques du groupe de Galois absolu d'un corps p -adique et en particulier, on définit toute une hiérarchie parmi ces représentations (représentations presque de Hodge-Tate, de Hodge-Tate, de de Rham, semi-stables, cristallines).

Ce texte contient des résultats classiques (notamment la théorie de Sen [Sen69], objet essentiel des chapitres 1 et 2) ou déjà publiés ailleurs (notamment le théorème *faiblement admissible implique admissible* [CF00], dont on parle dans le chapitre 5, on ne donne ici qu'une esquisse de la preuve). Il contient aussi des résultats non publiés ailleurs comme

- l'analogue de la théorie de Sen lorsque l'on remplace le corps $\mathbb{C}_p$ par le corps B_{dR} (chapitre 3),
- la notion de représentation p -adique *presque de Hodge-Tate* et de représentation p -adique *presque de de Rham* et le fait que ces deux notions coïncident (chapitre 4),
- le fait qu'il n'y a pas d'autre $\mathbb{Q}_p$ -endomorphisme continu de $\mathbb{C}_p$, Galois-équivariant, que les homothéties par un élément du corps de base (chapitre 6). Ceci est — avec une version renforcée du lemme fondamental de [CF00] due à Pierre Colmez [Co02] — à la base de la théorie des *presque $\mathbb{C}_p$ -représentations*, développée ailleurs [Fo03].

Rentrons un peu plus dans les détails. Dans tout ce texte, K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K , on pose $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ et on note I_K le sous-groupe d'inertie. On note C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p -adique (corps souvent noté $\mathbb{C}_p$ lorsque k est algébrique sur $\mathbb{F}_p$) et B_{dR} le corps des périodes p -adiques (la définition de B_{dR} est rappelée au chapitre 3). Il est muni d'une topologie naturelle. Le groupe G_K opère continûment sur C et sur B_{dR} .

Une *représentation p -adique de G_K* consiste en la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K . Avec comme morphismes les applications $\mathbb{Q}_p$ -linéaires G_K -équivariantes, les représentations p -adiques de G_K forment une catégorie abélienne que nous notons $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

Plus généralement, soient J un groupe topologique et B un corps muni d'une topologie et d'une action continue de J (compatible avec la structure de corps). On appelle *B -représentation de J* la donnée d'un B -espace vectoriel W de dimension finie muni d'une action semi-linéaire et continue de J (dire que l'action est semi-linéaire signifie

- i) que l'on a $g(w_1 + w_2) = g(w_1) + g(w_2)$ si $g \in J$ et $w_1, w_2 \in W$,
- ii) et que l'on a $g(bw) = g(b)g(w)$ si $g \in J$, $b \in B$ et $w \in W$).

Avec comme morphismes les applications B -linéaires J -équivariantes, les B -représentations de J forment une catégorie abélienne que nous notons $\text{Rep}_B(J)$.

Si l'action de J sur B est non triviale, cette catégorie n'est pas B -linéaire. Dans tous les cas, si $E = B^J$, E est un corps et $\text{Rep}_B(J)$ est E -linéaire.

On sait aussi définir la représentation unité (c'est B muni de l'action donnée de J), le produit tensoriel de deux B -représentations W_1 et W_2 (c'est $W_1 \otimes_B W_2$ avec $g(w_1 \otimes w_2) = g(w_1) \otimes g(w_2)$ si $g \in J$, $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$) et la représentation duale de la B -représentation W (c'est le B -espace vectoriel dual W^* de W , avec $(g(\eta))(w) = g(\eta(g^{-1}(w)))$ si $g \in J$, $\eta \in W^*$ et $w \in W$).

Muni de ces structures, $\text{Rep}_B(J)$ devient ce que l'on appelle *une catégorie tannakienne sur E* (cf. par exemple, [DM82]).

Une sous-catégorie tannakienne de $\text{Rep}_B(J)$ est une sous-catégorie strictement pleine (i.e. une sous-catégorie pleine telle que, si W est un objet de cette catégorie, alors tout objet de $\text{Rep}_B(J)$ isomorphe à W aussi) qui contient l'objet-unité B et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual.

Ceci s'applique en particulier à $B = \overline{K}$, C ou B_{dR} et $J = G_K$. Si V est une représentation p -adique de G_K de dimension h , $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est de manière naturelle une B -représentation de G_K . Disons que V est *B -admissible* si cette B -représentation est triviale (i.e. isomorphe à B^h). Les représentations B -admissibles forment une sous-catégorie tannakienne de $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

Proposition 0.0. — *Soit V une représentation p -adique de G_K . Pour que V soit $\overline{K}$ -admissible, il faut et il suffit que le noyau de l'action de G_K sur V soit un sous-groupe ouvert de G_K .*

Démonstration. — Le fait que la condition est nécessaire résulte immédiatement de ce que l'action de G_K sur $\overline{K}$ est discrète. Réciproquement, supposons que le noyau N de l'action de G_K sur V soit ouvert dans G_K et soit $L = \overline{K}^N$. Soit h la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Choisissons une base $\{e_1, e_2, \dots, e_h\}$ de V sur $\mathbb{Q}_p$; elle s'identifie aussi, de façon évidente, à une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur L ainsi qu'à une base de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur $\overline{K}$. L'action de G_K sur V se factorise à travers le groupe $J = \text{Gal}(L/K)$. Pour tout $g \in J$, notons $\rho(g)$ la matrice dont la j -ième colonne est formée des composantes de $g(e_j)$ sur la base $\{e_1, e_2, \dots, e_h\}$. On obtient ainsi un homomorphisme $\rho : \text{Gal}(L/K) \rightarrow GL_h(\mathbb{Q}_p)$ que l'on peut voir, via l'inclusion $GL_h(\mathbb{Q}_p) \subset GL_h(L)$ comme un 1-cocycle de J à valeurs dans $GL_h(L)$. On voit que remplacer ce cocycle par un cocycle équivalent revient à changer la base du L -espace vectoriel $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Comme l'ensemble pointé $H^1(J, GL_h(L))$ est trivial (cf. par exemple [CL], chap. X, prop. 3), il existe une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur L formée d'éléments fixes par J . C'est aussi une base de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ formée d'éléments fixes par G_K et l'existence d'une telle base permet de définir un isomorphisme de $\overline{K}^h$ sur $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui commute à l'action de G_K . $\square$

– C'est un théorème profond de Sen dont nous ne parlons pas ici (cf. [Sen73], cor. 1), que V est C -admissible si et seulement si le noyau de l'action de I_K est un

sous-groupe ouvert de I_K (en particulier, lorsque k est algébriquement clos, si une représentation p -adique de G_K est C -admissible, elle est déjà $\overline{K}$ -admissible).

– Il n'existe pas (à notre connaissance) de caractérisation de ce type pour les représentations p -adiques de G_K qui sont *de de Rham* (c'est ainsi qu'on appelle les représentations B_{dR} -admissibles).

Si V est une représentation p -adique de G_K , $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (resp. $B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$) est une C -représentation (resp. une B_{dR} -représentation) de G_K qui est non triviale si et seulement si V n'est pas C -admissible (resp. n'est pas *de de Rham*). D'où l'intérêt qu'il y a à étudier les catégories $\text{Rep}_C(G_K)$ et $\text{Rep}_{B_{\text{dR}}}(G_K)^{(1)}$. L'étude de la première est la théorie de Sen. Nous la reprenons, la poussons « jusqu'au bout » et nous intéressons aussi à la seconde. On obtient une classification complète de ces représentations. Si $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$) désigne l'ensemble des orbites de $\overline{K}$ (resp. $\overline{K}/\mathbb{Z}$) sous l'action de G_K , les classes d'isomorphisme d'objets simples de $\text{Rep}_C(G_K)$ (resp. $\text{Rep}_{B_{\text{dR}}}(G_K)$) sont paramétrées par $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$). Les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de $\text{Rep}_C(G_K)$ (resp. $\text{Rep}_{B_{\text{dR}}}(G_K)$) sont paramétrées par $\mathcal{C}(\overline{K}) \times \mathbb{N}^*$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}^*$).

Décrivons maintenant le contenu des différents chapitres.

L'objectif essentiel du chapitre 1 est d'exposer les résultats de Tate et Sen sur la cohomologie continue du corps C . Ils reposent sur une étude fine de la ramification dans la $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique de K (i.e. l'unique $\mathbb{Z}_p$ -extension K_∞ de K contenue dans le sous-corps de $\overline{K}$ engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p).

Le point crucial est *le théorème fondamental de Tate* (th. 1.8) qui est à la base de toute la théorie des périodes p -adiques et qui, comme on le dit maintenant ([Fa02], § 2), signifie que l'anneau des entiers $\mathcal{O}_M$ de toute extension finie M de K_∞ est *presqu'étale* sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K_\infty}$ de K_∞ . De façon précise, si $\text{tr}_{M/K_\infty} : M \rightarrow K_\infty$ est la trace et si $\mathfrak{m}_{K_\infty}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$, ou bien $\text{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) = \mathcal{O}_{K_\infty}$, ou bien $\text{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) = \mathfrak{m}_{K_\infty}$.

Posons $H_K = \text{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$, $\Gamma = G_K/H_K$ et notons L l'adhérence de K_∞ dans C . Les principaux résultats (dus à Tate et Sen) sont (th. 1.1) que $C^{H_K} = L$ et que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $H_{\text{cont}}^1(H_K, GL_h(C)) = 1$; puis (th. 1.2) que $L^\Gamma = C^{G_K} = K$ et que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, l'application naturelle $H_{\text{cont}}^1(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \rightarrow H_{\text{cont}}^1(\Gamma, GL_h(L)) = H_{\text{cont}}^1(G_K, GL_h(C))$ est bijective.

Dans le chapitre 2, on étudie la catégorie $\text{Rep}_C(G_K)$. Le premier théorème de Sen dit que, pour toute C -représentation W de G_K , l'application C -linéaire $C \otimes_L W^{H_K} \rightarrow W$ déduite de l'inclusion de W^{H_K} dans W est un isomorphisme.

⁽¹⁾Le fait que $\overline{K}$ n'est pas complet rend illusoire l'étude de la catégorie $\text{Rep}_{\overline{K}}(G_K)$.