# UNIFORMISATION $P$-ADIQUE DES COURBES DE SHIMURA : LES THÉORÈMES DE ČEREDNIK ET DE DRINFELD

J.-F. BOUTOT et H. CARAYOL

## Table des matières

## III. Le théorème de Čerednik-Drinfeld



### Introduction

Soit $\Delta$ une algèbre de quaternions indéfinie de centre $\mathbb{Q}$. Il lui correspond un système projectif, indexé par les sous-groupes compacts ouverts $U$ de $\Delta(\mathbb{A}_f)^*$, de *courbes de Shimura* $S_U$ : ce sont des courbes algébriques (complètes si $\Delta$ est un corps gauche), définies sur $\mathbb{Q}$, dont les composantes connexes absolues sont définies sur des extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}$. L'exemple le plus connu d'une telle situation est le cas où $\Delta$ est déployée : les courbes obtenues alors sont les habituelles courbes modulaires. On a étudié depuis longtemps la réduction modulo $p$ de ces dernières, et l'on sait bien que la nature de cette réduction dépend de l'exposant en $p$ du niveau, c'est-à-dire de la composante $U_p$ en $p$ du sous-groupe $U$ (supposant pour simplifier que celui-ci se décompose en un produit) : en particulier — prenant $U$ assez petit pour éviter quelques problèmes techniques liés à la non-représentabilité — notre courbe a bonne réduction en $p$ si $U_p$ est maximal, c'est-à-dire si $p$ ne divise pas le niveau. On renvoie à [De-Ra] et [K-M] pour l'étude de la mauvaise réduction, dans les cas où $U_p$ n'est pas maximal : cette réduction est décrite en termes d'un problème de modules (où interviennent les fameuses bases de Drinfeld), lequel permet en particulier l'étude de la fibre spéciale et de la singularité obtenue. Dans le cas d'une algèbre $\Delta$ plus générale, *en une place $p$ où $\Delta$ est déployée*, la situation est formellement isomorphe à celle rencontrée dans le cas des courbes modulaires : la courbe de Shimura a bonne réduction lorsque $U_p$ est maximal, et les cas de mauvaise réduction sont décrits de façon analogue au cas modulaire; tout cela se généralise même au cadre plus général des courbes associées à des algèbres de quaternions sur des corps totalement réels ([Ca 1]).

Toute autre est la situation que l'on rencontre *en une place $p$ où l'algèbre $\Delta$ est ramifiée* : dans ce cas, supposant que $U_p$ est *maximal*, Čerednik a découvert que la courbe de Shimura $S_U$ admettait en $p$ une *uniformisation p-adique*, c'est-à-dire que $S_U \otimes \mathbf{Q}_p$ était la réunion de (formes tordues galoisiennes de) *quotients à la Mumford* du "demi-plan $p$-adique" par des sous-groupes de Schottky de $PGL(2, \mathbf{Q}_p)$ ; ces derniers sous-groupes sont liés à l'algèbre $\overline{\Delta}$ déduite de $\Delta$ en échangeant les invariants locaux aux places $p$ et $\infty$ (i.e. $\overline{\Delta}$ est définie et déployée en $p$). On peut ensuite, si besoin est, utiliser cette uniformisation pour décrire la fibre spéciale en $p$, laquelle apparaît donc comme le quotient par un groupe fini d'un graphe de droites projectives (cette fibre est en général singulière).

Čerednik a obtenu son résultat par une habile méthode indirecte, dont le principe est de considérer a priori la courbe de Mumford, et de la comparer à la courbe de Shimura en étudiant de part et d'autre l'action du groupe fondamental : cette méthode, qui repose sur des travaux antérieurs d'Ihara, est proche — ce qui ne saurait surprendre — de celle utilisée par Kazhdan pour traiter de la conjugaison des variétés de Shimura.

Deligne et Kazhdan ont vite remarqué que le résultat de Čerednik laissait soupçonner l'existence d'une famille universelle de *groupes formels* sur le "demi-plan" rigide - analytique $\Omega_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{P}^1(\widehat{\overline{\mathbf{Q}}}_p) - \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ ; c'est là le théorème fondamental que Drinfeld a alors su démontrer : de manière un peu plus précise, il a prouvé que $\widehat{\Omega}_{\mathbf{Q}_p} \widehat{\otimes} \widehat{\mathbf{Z}}_p^{nr}$ — où $\widehat{\Omega}_{\mathbf{Q}_p}$ est un schéma formel sur $\mathbf{Z}_p$ dont $\Omega_{\mathbf{Q}_p}$ est la fibre générique — paramétrait une famille de groupes formels, de dimension 2 et de hauteur 4, munis d'une action de l'ordre maximal du corps de quaternions $D$ de centre $\mathbf{Q}_p$, et d'une "rigidification". Le théorème local de Drinfeld est d'ailleurs valide aussi bien en dimension supérieure (où $\Omega_{\mathbf{Q}_p}$ est remplacé par $\mathbf{P}^{n-1}(\widehat{\overline{\mathbf{Q}}}_p)$ privé de tous ses hyperplans rationnels : on obtient alors un espace de modules pour des groupes formels de dimension $n$ et de hauteur $n^2$, munis d'une action de l'ordre maximal du corps gauche d'invariant 1/n), ainsi que pour les $\Omega_K = \mathbf{P}^1(\widehat{\overline{K}}) - \mathbf{P}^1(K)$ (où $K$ est un corps local non archimédien) et leurs analogues en dimension supérieure. La méthode utilisée par Drinfeld pour démontrer son théorème repose sur la théorie de Dieudonné-Cartier : elle consiste à effectuer d'ingénieuses constructions algébriques sur les modules de Dieudonné des groupes formels considérés, leur associant de cette façon des structures que l'on sait (d'après Deligne) être représentables par le schéma formel $\widehat{\Omega}_{\mathbf{Q}_p} \widehat{\otimes} \widehat{\mathbf{Z}}_p^{nr}$, puis à montrer que l'on obtient ainsi un isomorphisme de foncteurs.

Une fois prouvé le théorème local, Drinfeld parvient assez facilement à en déduire le résultat originel de Čerednik : on sait en effet que $S_U$ paramétrise une famille de variétés abéliennes, dont il compare les complétés formels aux groupes formels classifiés par $\widehat{\Omega}_{\mathbf{Q}_p} \widehat{\otimes} \widehat{\mathbf{Z}}_p^{nr}$. Le théorème de Drinfeld révèle donc, en quelque sorte, la structure profonde du résultat de Čerednik. Outre cela, ce théorème local permet de définir naturellement un système projectif de revêtements étales $\Sigma_n$ de $\Omega_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathbf{Q}_p^{nr}$ : ces revêtements, un peu mystérieux, permettent d'uniformiser $p$-adiquement les courbes $S_U$ en une place $p$ où $\Delta$ est ramifiée et où $U_p$ n'est pas maximal, une situation qui n'était pas abordable par les méthodes originelles de Čerednik. On peut également appliquer le théorème local à d'autres cas que celui des courbes de Shimura sur $\mathbf{Q}$, et obtenir d'autres résultats d'uniformisation $p$-adique : par exemple, uniformiser les courbes de Shimura définies sur des corps totalement réels (cas d'ailleurs déjà traité dans l'article de Čerednik) ; les spécialistes du sujet savent en principe comment le faire, mais nul à notre connaissance ne l'a encore écrit. De même, Rapoport et Zink savent, partant du théorème local en dimension supérieure, uniformiser des variétés de Shimura associées à certains groupes unitaires. Signalons enfin que Drinfeld sait uniformiser ses "Modules elliptiques II" par les revêtements $\Sigma_n$.

Drinfeld a exposé son théorème dans un très bref article ([Dr 2]), très concentré et difficilement abordable; notre but ici est d'expliquer la méthode qu'il utilise, et de donner des démonstrations détaillées. Le présent travail est divisé en trois chapitres bien distincts. Le premier traite du demi-plan non archimédien, de ses différents aspects (rigide-analytique ou formel), des divers problèmes de modules qu'il représente. Le second chapitre constitue à la fois le coeur et la partie la plus substantielle de cet article : le théorème local y est énoncé et prouvé. L'essentiel de la méthode utilisée par Drinfeld dans cette preuve nous a été expliqué par Thomas Zink, qui nous a fait à Strasbourg de nombreux exposés sur le sujet. Notre dette à son égard est difficilement estimable : nous lui exprimons ici tous nos remerciements, dans l'espoir que notre rédaction le satisfasse. Après avoir longtemps hésité, nous avons fait le choix, peut-être discutable, de ne rédiger ce théorème local que dans le cas du "demi-plan", c'est-à-dire en dimension 1 (sur un corps $p$-adique arbitraire, toutefois) ; ce choix nous permet de raccourcir quelque peu nos diagrammes, et de mieux expliciter les différents cas qui se présentent (toutefois les idées nécessaires à la démonstration en dimension supérieure sont pour l'essentiel similaires). Le troisième et dernier chapitre enfin traite de la situation globale : nous y énonçons, commentons et prouvons le théorème de Čerednik (dans le cas où le corps de base est $\mathbf{Q}$).

## Chapitre I : Le “demi-plan” non archimédien.

Soient $K$ un corps local non archimédien et $C$ le complété de la clôture algébrique de $K$. Le “demi-plan” non archimédien $\Omega$ sur $K$ est défini ensemblistement par $\Omega = \mathbb{P}^1(C) - \mathbb{P}^1(K)$.

Nous rappelons tout d'abord au §1 la construction de l'arbre I associé à $PGL(2, K)$ [Se] et de sa réalisation géométrique $I_{\mathbb{R}}$. Puis (§2) nous définissons une application $\lambda : \Omega \longrightarrow I_{\mathbb{R}}$ qui permet de décrire la structure d'espace analytique rigide, au sens de Tate [Ta 1], de $\Omega$ par recollement des images réciproques par $\lambda$ des arêtes de l'arbre. Cette description donnée par Drinfeld [Dr 1] a été reprise en détail (en dimension quelconque) par Deligne et Husemöller [De-Hu]. Pour les bases de la géométrie analytique rigide, on peut consulter [B-G-R] et [Fr-VdP].

Nous définissons ensuite (§3) un modèle formel, au sens de Raynaud [Ra 1], de l'espace analytique rigide $\Omega$. C'est un schéma formel $\widehat{\Omega}$ au-dessus de l'anneau des entiers de $K$ que nous construisons également par recollement de schémas formels $\widehat{\Omega}_{[s,s']}$ correspondants aux arêtes [s,s'] de l'arbre $I$. Ce modèle formel fut introduit par Mumford [Mu 2] dans son article sur l'analogue non archimédien de l'uniformisation de Schottky des surfaces de Riemann.

Le §4 explique la description fonctorielle donnée par Deligne (non publié) des schémas formels $\widehat{\Omega}_{[s,s']}$ en terme des réseaux adjacents correspondants aux sommets $s$ et $s'$ de $I$. Par recollement de ces réseaux en des faisceaux constructibles, on obtient au §5 la description fonctorielle de $\widehat{\Omega}$ qu'utilise Drinfeld [Dr 2]. On trouvera un autre compte-rendu de cette description dans l'article récemment paru de Teitelbaum [Te].

Pour clore ce chapitre (§6), nous décrivons l'action du groupe $PGL(2, K)$ sur le schéma formel $\widehat{\Omega}$ et sur le foncteur correspondant.

### 1. L'immeuble de $PGL(2, K)$.

(1.0) Soient $K$ un corps local non archimédien, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $K$ et $\pi$ une uniformisante de $\mathcal{O}$. Soient $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ le corps résiduel,