

quatrième série - tome 51 fascicule 3 mai-juin 2018

*ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE*

Fabrizio ANDREATTA & Adrian IOVITA & Vincent PILLONI

Le halo spectral

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief*

Patrick BERNARD

Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur

Continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par C. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
de 1918 à 1941 par É. PICARD
de 1942 à 1967 par P. MONTEL

Comité de rédaction au 1^{er} mars 2018

P. BERNARD	A. NEVES
S. BOUCKSOM	J. SZEFTTEL
R. CERF	S. VŨ NGỌC
G. CHENEVIER	A. WIENHARD
Y. DE CORNULIER	G. WILLIAMSON
E. KOWALSKI	

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition et abonnements / *Publication and subscriptions*

Société Mathématique de France
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Tél. : (33) 04 91 26 74 64
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : smf@smf.univ-mrs.fr

Tarifs

Abonnement électronique : 420 euros.
Abonnement avec supplément papier :
Europe : 540 €. Hors Europe : 595 € (\$ 863). Vente au numéro : 77 €.

© 2018 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1^{er} juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane Seuret
Périodicité : 6 n^{os} / an

LE HALO SPECTRAL

PAR FABRIZIO ANDREATTA, ADRIAN IOVITA
ET VINCENT PILLONI

RÉSUMÉ. — Nous construisons un espace de formes surconvergentes en caractéristique p , un opérateur compact sur cet espace et nous montrons que la série caractéristique de cet opérateur est la réduction modulo p de la série universelle de Coleman. Nous démontrons que les formes surconvergentes en caractéristique p de pente finie se déforment vers la caractéristique 0.

ABSTRACT. — We construct a space of overconvergent modular forms of characteristic p , a compact operator on this space and we show that the characteristic series of this operator is the reduction modulo p of Coleman's universal series. We prove that finite slope overconvergent modular forms in positive characteristic can be deformed to characteristic 0.

1. Introduction

1.1. Présentation des résultats

Soit p un nombre premier et N un entier premier à p . Soit X la courbe modulaire sur $\mathbb{Z}_p$ de niveau N . Soit $\bar{X}$ sa réduction modulo p , $\bar{X}_{\text{ord}}$ le lieu ordinaire et $\mathfrak{X}_{\text{ord}}$ le schéma formel p -adique lieu ordinaire. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de $\bar{X}_{\text{ord}}$ et $\rho : \Pi_1(\bar{X}_{\text{ord}}, \bar{x}) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ la représentation donnée par la tour d'Igusa qui paramètre les trivialisations de la partie multiplicative du module de Tate du schéma semi-abélien universel. Pour tout caractère $\kappa : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$, l'équivalence de Katz [21] associe à $\kappa \circ \rho$ un ϕ -module étale ω^κ sur $\mathfrak{X}_{\text{ord}}$. Ses sections globales sont l'espace $M_\kappa^{p\text{-ad}}$ des formes modulaires p -adiques de poids κ . L'opérateur de Dwork associé est $U_p = p^{-1}\text{Tr}_\phi$. Dans [21] si κ est algébrique, puis dans [10] (complété par [12], [7] et revisité dans [3] et [25]), il est démontré que le ϕ -module ω^κ surconverge. Ses sections surconvergentes sont l'espace $M_\kappa^\dagger$ des formes modulaires surconvergentes de poids κ .

L'opérateur U_p est compact et on peut définir, d'après [27], la série caractéristique $\mathcal{P}_\kappa(X) := \det(1 - XU_p | M_\kappa^\dagger)$ qui est une fonction entière de la variable X .

Notons $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Coleman montre de plus l'existence d'une série caractéristique universelle $\mathcal{P}(X) \in \Lambda[[X]]$ qui interpole les différentes séries caractéristiques $\mathcal{P}_\kappa(X)$. Notons $\mathcal{W}^{\text{rig}} = (\text{Spf } \Lambda)^{\text{rig}}$ l'espace rigide des poids, qui est une union finie $\coprod \mathcal{W}_\chi^{\text{rig}}$ de boules ouvertes de rayon 1 paramétrées par les caractères $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$ (où $q = 4$ si $p = 2$ et $q = p$ sinon). Coleman et Mazur définissent la variété spectrale $\mathcal{Z}^{\text{rig}} = V(\mathcal{P}) \subset \mathcal{W}^{\text{rig}} \times \mathbb{A}^1$. Ses points sont des couples (κ, α^{-1}) où κ est un poids et α une valeur propre non nulle de U_p agissant sur $M_\kappa^\dagger$. Ils définissent également la courbe de Hecke $\mathcal{E}^{\text{rig}} \rightarrow \mathcal{Z}^{\text{rig}}$ dont les points sont des triplets $(\kappa, \alpha^{-1}, \lambda)$ où $(\kappa, \alpha^{-1}) \in \mathcal{Z}^{\text{rig}}$ et λ est un système de valeurs propres de Hecke agissant sur l'espace propre $(M_\kappa^\dagger)^{U_p=\alpha}$.

Bien que la construction de la variété de Hecke soit de nature rigide analytique, il est surprenant que la série caractéristique $\mathcal{P}(X)$ soit à coefficients entiers. Ceci suggère la possibilité d'une théorie entière des formes surconvergentes. Ce travail a pour but d'établir une telle théorie. Notre point de départ est une conjecture de Coleman sur la réduction modulo p de la série caractéristique. Fixons un isomorphisme $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times][[T]]$, en envoyant $\exp(q)$ sur $1+T$. Pour tout caractère χ de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, notons $\mathcal{P}_\chi(X) \in \mathbb{Z}_p[[T]][[X]]$ la χ -partie de $\mathcal{P}(X)$ et $\overline{\mathcal{P}_\chi(X)} \in \mathbb{F}_p[[T]][[X]]$ sa réduction modulo p . Notons aussi $\bar{\kappa}_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$ le caractère obtenu par réduction du caractère universel et projection sur la χ -partie (on remarquera que si $p = 2$, $\bar{\kappa}_\chi$ est indépendant de χ). Dans [11], Coleman observe que c'est une série entière de la variable X à coefficients dans l'anneau $\mathbb{F}_p[[T]]$ équipé de la topologie T -adique et il conjecture le résultat suivant :

CONJECTURE 1 ([11]). – *Pour chaque caractère χ du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, on possède un $\mathbb{F}_p((T))$ -espace de formes surconvergentes $M_{\bar{\kappa}_\chi}^\dagger$ de poids $\bar{\kappa}_\chi$ et un opérateur compact U_p dont la série caractéristique est $\overline{\mathcal{P}_\chi(X)}$.*

Pour tout caractère $\bar{\kappa}_\chi$ comme au-dessus, l'équivalence de Katz associe à $\bar{\kappa}_\chi \circ \rho : \Pi_1(\bar{X}_{\text{ord}}, \bar{x}) \rightarrow \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ un ϕ -module étale $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ sur le schéma formel T -adique $\mathfrak{X}_{\text{ord}, \{\infty\}} := \bar{X}_{\text{ord}} \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_p} \text{Spf } \mathbb{F}_p[[T]]$. Notons $\mathcal{X}_{\{\infty\}}$ l'espace rigide sur $\mathbb{F}_p((T))$ associé au schéma formel $\bar{X} \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_p} \text{Spf } \mathbb{F}_p[[T]]$ et $\mathcal{X}_{\text{ord}, \{\infty\}} \subset \mathcal{X}_{\{\infty\}}$ l'ouvert ordinaire. On peut alors se demander si le ϕ -module étale $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ surconverge sur un voisinage de $\mathcal{X}_{\text{ord}, \{\infty\}}$ dans $\bar{\mathcal{X}}$.

THÉORÈME 1.1. – *Le ϕ -module $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ est surconvergent.*

Nous définissons alors $M_{\bar{\kappa}_\chi}^\dagger$ comme l'espace des sections surconvergentes de $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$. On possède sur cet espace un opérateur compact U_p associé à ϕ . On peut définir sa série caractéristique, et on veut vérifier qu'elle vaut $\overline{\mathcal{P}_\chi(X)}$. Il nous faut à présent relier cet espace aux espaces de formes surconvergentes de caractéristique 0.

Commençons par « compactifier » l'espace des poids. L'idée est d'ajouter à $\mathcal{W}^{\text{rig}}$ les caractères $\bar{\kappa}_\chi$. Cet espace des poids compactifié possèdera donc des points de caractéristique 0 et p , on sort du cadre classique de la géométrie rigide, et nous utilisons à présent la théorie des espaces adiques de Huber. Définissons donc $\mathcal{W} = \text{Spa}(\Lambda, \Lambda)^{\text{an}}$, c'est l'ouvert des points analytiques de $\text{Spa}(\Lambda, \Lambda)$. Comme ensemble, $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\text{rig}} \cup \{\bar{\kappa}_\chi, \chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^\times\}$ (dorénavant $\mathcal{W}^{\text{rig}}$ désigne l'espace adique associé à $\mathcal{W}^{\text{rig}}$). Tout voisinage ouvert de $\{\bar{\kappa}_\chi\}$ dans $\mathcal{W}$ contient une couronne de rayon extérieur 1 dans la composante connexe $\mathcal{W}_\chi^{\text{rig}}$ de $\mathcal{W}^{\text{rig}}$ (resp. dans chaque composante connexe de $\mathcal{W}^{\text{rig}}$ si $p = 2$).

On possède un faisceau structural $(\mathcal{O}_{\mathcal{W}}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^+)$ et sur $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^+$ la topologie est (p, T) -adique. Plus précisément, sur tout ouvert quasi-compact de $\mathcal{W}^{\text{rig}}$, la topologie (p, T) -adique coïncide avec la topologie p -adique. Inversement, sur tout ouvert quasi-compact qui évite les centres $T = 0$ des disques ouverts $\mathcal{W}_\chi^{\text{rig}}$ la topologie (p, T) -adique coïncide avec la topologie T -adique. On assiste donc, à mesure qu'on se rapproche du bord de $\mathcal{W}$, à un glissement de la topologie p -adique vers la topologie T -adique.

Considérons la courbe modulaire relative $\mathcal{M}_{[0, \infty]} = X \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}_p} \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ et son ouvert ordinaire $\mathcal{M}_{\text{ord}, [0, \infty]}$. La construction de Katz appliquée au caractère universel $\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \Lambda^\times$ et à ρ nous fournit une famille universelle $\omega_{[0, \infty]}^\kappa$ de ϕ -modules sur $\mathcal{M}_{\text{ord}, [0, \infty]}$. Un système fondamental de voisinages de $\mathcal{M}_{\text{ord}, [0, \infty]}$ dans $\mathcal{M}_{[0, \infty]}$ est donné par les ouverts $\mathcal{M}_{r, [0, \infty]}$ d'équation :

$$|\tilde{\text{Ha}}^{p^{r+1}}| \geq \sup\{|T|, |p|\}$$

où $\tilde{\text{Ha}}$ désigne un relèvement arbitraire local de l'invariant de Hasse. Si on regarde ces voisinages pour la topologie p -adique sur l'ouvert $\mathcal{W}^{\text{rig}}$, alors ils se rétrécissent vers le lieu ordinaire à l'infini. Dans [3] et [25], nous avons montré la surconvergence de $\omega_{[0, \infty]}^\kappa$ au-dessus de $\mathcal{W}^{\text{rig}}$ et dans le théorème 1.1 nous avons montré la surconvergence à l'infini. Le théorème suivant unifie ces deux résultats :

THÉORÈME 1.2. – *La famille universelle de ϕ -modules $\omega_{[0, \infty]}^\kappa$ sur $\mathcal{M}_{\text{ord}, [0, \infty]}$ surconverge sur $\mathcal{M}_{r, [0, \infty]}$ pour $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p = 2$).*

La série caractéristique associée à cette famille de ϕ -modules est à coefficients dans $\Lambda = H^0(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}})$. Par fonctorialité, on vérifie que c'est bien la série caractéristique de Coleman. Nous sommes donc en mesure d'établir la conjecture 1 :

COROLLAIRE 1.1. – *La série caractéristique de U_p sur $M_{\bar{\kappa}_\chi}^\dagger$ vaut $\overline{\mathcal{P}_\chi}$.*

Soit $\mathcal{Z} = V(\mathcal{P}) \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ la variété spectrale adique. Sa fibre au-dessus de $\mathcal{W}^{\text{rig}}$ est $\mathcal{Z}^{\text{rig}}$. Sa fibre à l'infini est l'ensemble des points $(\bar{\kappa}_\chi, \alpha^{-1})$ où α est une valeur propre non nulle de U_p agissant sur $M_{\bar{\kappa}_\chi}^\dagger$. On possède sur $\mathcal{Z}$ un faisceau cohérent universel $M^\dagger$ d'espaces caractéristiques de formes surconvergentes et une courbe de Hecke adique $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Z}$ où $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est le sous-faisceau de $\text{End}_{\mathcal{Z}}(M^\dagger)$ engendré par les opérateurs de Hecke. Le théorème suivant généralise les résultats du chapitre 7 de [12]. Il montre l'existence de familles de pente finie pour la topologie T -adique au voisinage de l'infini.

THÉORÈME 1.3. – *Le morphisme $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{W}$ est localement fini et plat sur $\mathcal{Z}$. Le morphisme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}$ est localement fini et sans torsion.*

COROLLAIRE 1.2. – *Soit $f \in M_{\bar{\kappa}_\chi}^\dagger$ une forme propre surconvergente de pente finie. Soit $x_f \in \mathcal{E}$ le point associé. Il existe un voisinage $\mathcal{W}_{\bar{\kappa}_\chi}$ de $\bar{\kappa}_\chi$ dans $\mathcal{W}$ et un voisinage $\mathcal{E}_{x_f}$ de x_f dans $\mathcal{E}$ tel que le morphisme associé $\mathcal{E}_{x_f} \rightarrow \mathcal{W}_{\bar{\kappa}_\chi}$ soit fini et sans torsion.*

De plus, pour tout entier $k \geq 2$, on peut trouver une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de formes propres classiques de pente finie et de poids k , de point associé x_{f_n} sur $\mathcal{E}_{x_f}$, tel que $x_{f_n} \rightarrow x_f$ quand $n \rightarrow \infty$.