

ASTÉRIQUE 284

**AUTOUR DE L'ANALYSE
MICROLOCALE**

VOLUME EN L'HONNEUR DE JEAN-MICHEL BONY

édité par
Gilles Lebeau

Société Mathématique de France 2003
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

G. Lebeau

UMR 6621 du CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice,
Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France.

E-mail : Gilles.Lebeau@math.unice.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 17B15, 30C35, 30D05, 31C10, 35A, 35A07, 35A27, 32C38, 35D10, 35H, 35L25, 35L40, 35L55, 35L70, 35N, 35P05, 37F99, 37J40, 37K05, 47J20, 58J52.

Mots clefs. — Équation d'ondes quasi-linéaire, inégalité d'énergie, décroissance, explosion, optique géométrique, inégalité de Poincaré, calcul paradifférentiel, norme à poids, estimation bilinéaire, analyse microlocale, calcul pseudodifférentiel de Weyl-Hörmander, faisceaux, micro-support, $\mathcal{D}$ -modules, ind-objets, groupe de Lie, paire symétrique, régularité, Bohr, Sommerfeld, valeur propre, tore, équation de Cauchy-Riemann, inégalité de Sobolev logarithmique, opérateurs de Hörmander, hypoellipticité, vitesse de groupe, polynôme hyperbolique, opérateur hyperbolique, variété caractéristique, réflexion de Schwarz, transformations conformes, paires d'arcs analytiques.

AUTOUR DE L'ANALYSE MICROLOCALE
VOLUME EN L'HONNEUR DE JEAN-MICHEL BONY

édité par Gilles Lebeau

Résumé. — À l'occasion du soixantième anniversaire de Jean-Michel Bony, ses élèves, collaborateurs et amis ont tenu à lui dédier ce volume de la collection *Astérisque*. Il contient des articles de recherche en Analyse Microlocale linéaire, non-linéaire, algébrique..., illustrant la vivacité de ce domaine des mathématiques auquel J.-M. Bony a tant contribué.

Abstract (Around microlocal analysis. Volume in honor of Jean-Michel Bony)

On the occasion of the sixtieth birthday of Jean-Michel Bony, his former students, collaborators and friends dedicate to him this *Astérisque* volume. It contains research articles on the linear, non-linear and algebraic microlocal analysis. . . , illustrating the vividness of this field of mathematics to which J.-M. Bony contributed so much.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles	ix
Abstracts	xi
Préface	xiii
S. ALINHAC — <i>An Example of Blowup at Infinity for a Quasilinear Wave Equation</i>	1
Introduction	2
I. Main result and ideas of the proof	2
II. Large time existence, induction hypothesis and first consequences	9
III. Improved L^∞ estimates on u	17
IV. A calculus of modified Klainerman's vector fields	36
V. Weighted L^2 norms, Poincaré Lemma and Energy Inequalities	58
VI. Commutations with the operator P	64
VII. L^2 estimates of u and a	75
References	91
H. BAHOURI & J.-Y. CHEMIN — <i>Microlocal analysis, bilinear estimates and cubic quasilinear wave equation</i>	93
Introduction	93
1. Method of the proof and structure of the paper	96
2. Littlewood-Paley theory and Paralinearization of the equation	102
3. Reduction to microlocalized estimates	106
4. Approximation of the solution and geometrical optics	118
5. The concept of microlocalized functions	127
6. The propagation theorem	132
7. The conclusion of the proof	136
References	139

M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA — <i>Microlocal study of ind-sheaves I: micro-support and regularity</i>	143
1. Introduction	143
2. Notations and review	145
3. Complements of homological algebra	150
4. Micro-support and regularity	152
5. Invariance by contact transformations	159
6. Ind-sheaves and $\mathcal{D}$ -modules	161
7. An example	162
References	164
Y. LAURENT — <i>Regularity of $\mathcal{D}$-modules associated to a symmetric pair</i>	165
Introduction	165
1. Bifiltrations of $\mathcal{D}$ -modules	166
2. Symmetric pairs	174
References	179
A. MELIN & J. SJÖSTRAND — <i>Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2</i>	181
0. Introduction	181
Contents of the paper	185
1. Construction of complex Lagrangian torii in $p^{-1}(0)$ in dimension 2	185
Appendix A : Reduction of elliptic vector fields on a torus	195
Appendix B : 2-dimensional manifolds with elliptic vector fields	197
2. Review of Fourier integral operators between H_Φ spaces	201
3. Formulation of the problem in H_Φ and reduction to a neighborhood of $\xi = 0$ in $T^*\Gamma_0$	203
4. Spectrum of elliptic first order differential operators on Γ_0	208
5. Grushin problem near $\xi = 0$ in $T^*\Gamma_0$	210
6. The main result	214
Appendix A : Remark on multiplicities	226
Appendix B : Modified $\bar{\partial}$ -equation for $(I_1(z), I_2(z))$	228
7. Saddle point resonances	230
References	243
Y. MORIMOTO & C.-J. XU — <i>Logarithmic Sobolev inequality and semi-linear Dirichlet problems for infinitely degenerate elliptic operators</i>	245
1. Introduction	245
2. Logarithmic Sobolev inequality	247
3. Variational problems	251
4. Boundedness and regularity of weak solutions	254
5. Appendix : Logarithmic regularity estimate	259
References	263

J. RAUCH — <i>Group velocity at smooth points of hyperbolic characteristic varieties</i>	265
References	269
J.-M. TRÉPREAU — <i>Discrimination analytique des difféomorphismes résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwarz</i>	271
Introduction	271
1. Paires d'arcs analytiques et réflexions	276
2. Classification des paires de type 2	281
3. Perturbations d'une paire de cercles tangents	285
4. Invariants géométriques d'une paire	291
5. Des exemples, avec une ellipse et une droite	302
Appendice: complément au Chapitre 2	311
Références	318

RÉSUMÉS DES ARTICLES

<i>An Example of Blowup at Infinity for a Quasilinear Wave Equation</i> SERGE ALINHAC	1
--	---

Nous considérons un exemple d'équation d'ondes quasi-linéaire qui se situe entre les exemples vraiment non-linéaires (pour lesquels l'explosion en temps fini est connue) et les exemples vérifiant la condition nulle (pour lesquels la solution existe globalement et est asymptotiquement libre). Nous montrons l'existence globale, bien que des arguments d'optique géométrique non-linéaire indiquent un comportement non libre de la solution à l'infini. La méthode de la preuve fait intervenir la commutation avec des champs dépendant de u , et utilise des idées proches de celles du calcul paradifférentiel.

<i>Microlocal analysis, bilinear estimates and cubic quasilinear wave equation</i> HAJER BAHOURI & JEAN-YVES CHEMIN	93
--	----

Dans cet article, nous étudions l'existence et l'unicité locale de solutions pour une équation d'onde quasilineaire cubique. Les classiques estimations de Strichartz ne sont pas adaptées dans ce cas. Nous démontrons des estimations bilinéaires pour des solutions d'équations d'ondes à coefficients variables. Les deux outils principaux sont le calcul paradifférentiel de Bony et la microlocalisation au sens du calcul pseudodifférentiel de Weyl-Hörmander.

<i>Microlocal study of ind-sheaves I : micro-support and regularity</i> MASAKI KASHIWARA & PIERRE SCHAPIRA	143
---	-----

Nous introduisons les notions de micro-support et régularité pour les ind-faisceaux et prouvons leur invariance par transformations de contact quantifiées. Nous appliquons ces résultats aux ind-faisceaux des solutions holomorphes tempérées des $\mathcal{D}$ -modules. Nous prouvons que le micro-support d'un tel ind-faisceau est la variété caractéristique du $\mathcal{D}$ -module correspondant et que le ind-faisceau est régulier si le $\mathcal{D}$ -module est holonome régulier. Nous calculons enfin un exemple du ind-faisceau des solutions tempérées d'un $\mathcal{D}$ -module irrégulier en dimension un.

<i>Regularity of $\mathcal{D}$-modules associated to a symmetric pair</i>	
YVES LAURENT	165

Sur une algèbre de Lie réductive, les distributions invariantes qui sont vecteurs propres des opérateurs différentiels bi-invariants sont les solutions d'un système holonome. Il a été démontré par Kashiwara-Hotta que ce module est régulier. Nous résolvons ici une conjecture de Sekiguchi en montrant que ce résultat est encore vrai dans le cas plus général des paires symétriques.

<i>Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2</i>	
ANDERS MELIN & JOHANNES SJÖSTRAND	181

Pour une classe d'opérateurs h -pseudodifférentiels non-autoadjoints, nous déterminons toutes les valeurs propres dans un domaine complexe indépendant de h et nous montrons que ces valeurs propres sont données par une condition de quantification de Bohr-Sommerfeld. Aucune condition d'intégrabilité complète est supposée, et une étape géométrique de la démonstration est donnée par un théorème du type KAM dans le complexe (sans petits dénominateurs).

<i>Logarithmic Sobolev inequality and semi-linear Dirichlet problems for infinitely degenerate elliptic operators</i>	
YOSHINORI MORIMOTO & CHAO-JIANG XU	245

Soit $X = (X_1, \dots, X_m)$ un système de champs de vecteurs infiniment dégénérés. On montre d'abord l'inégalité de Sobolev logarithmique pour ce système de champs de vecteurs sur les espaces de fonctions associés, puis on étudie le problème de Dirichlet semi-linéaire pour des opérateurs somme de carrés de champs de vecteurs X .

<i>Group velocity at smooth points of hyperbolic characteristic varieties</i>	
JEFFREY RAUCH	265

En un point lisse d'une variété caractéristique définie par un polynôme homogène hyperbolique, le plan tangent détermine la vitesse de groupe. Dans cet article, on en déduit un algorithme algébrique de calcul de ce plan tangent en un point donné. Il n'est intéressant que là où la différentielle du polynôme s'annule.

<i>Discrimination analytique des difféomorphismes résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwarz</i>	
JEAN-MARIE TRÉPREAU	271

Nous montrons que des arguments géométriques très simples, basés sur la réflexion de Schwarz, permettent souvent de décider si deux paires d'arcs analytiques tangents en $0 \in \mathbb{C}$ sont analytiquement équivalentes au voisinage de 0. Nous en déduisons la construction de familles nombreuses de germes, formellement mais non analytiquement conjugués, de difféomorphismes analytiques résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$.