

371

ASTÉRISQUE

2015

RELATIVE p -ADIC HODGE THEORY:
FOUNDATIONS

Kiran S. KEDLAYA

Ruochuan LIU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 371

Comité de rédaction

Ahmed ABBES
Viviane BALADI
Gérard BESSON
Laurent BERGER
Philippe BIANE
Hélène ESNAULT

Damien GABORIAU
Michael HARRIS
Fabrice PLANCHON
Pierre SCHAPIRA
Bertrand TOEN

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2015

Vente au numéro : 64 € (\$ 96)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € (\$ 1033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-807-7

Directeur de la publication : Marc Peigné

ASTÉRISQUE 371

RELATIVE p -ADIC HODGE THEORY:
FOUNDATIONS

Kiran S. Kedlaya
Ruochuan Liu

K. S. Kedlaya

Department of Mathematics, Room 7202, University of California, San Diego,
9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093-0112, USA.

E-mail : `kedlaya@ucsd.edu`

R. Liu

Department of Mathematics, University of Michigan, 1844 East Hall,
530 Church Street, Ann Arbor, MI 48109-1043, USA.

E-mail : `ruochuan@umich.edu`

RELATIVE p -ADIC HODGE THEORY: FOUNDATIONS

Kiran S. Kedlaya, Ruochuan Liu

Abstract. — We describe a new approach to relative p -adic Hodge theory based on systematic use of Witt vector constructions and nonarchimedean analytic geometry in the style of both Berkovich and Huber. We give a thorough development of φ -modules over a relative Robba ring associated to a perfect Banach ring of characteristic p , including the relationship between these objects and étale $\mathbb{Z}_p$ -local systems and $\mathbb{Q}_p$ -local systems on the algebraic and analytic spaces associated to the base ring, and the relationship between (pro-)étale cohomology and φ -cohomology. We also make a critical link to mixed characteristic by exhibiting an equivalence of tensor categories between the finite étale algebras over an arbitrary perfect Banach algebra over a nontrivially normed complete field of characteristic p and the finite étale algebras over a corresponding Banach $\mathbb{Q}_p$ -algebra. This recovers the homeomorphism between the absolute Galois groups of $\mathbb{F}_p((\pi))$ and $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ given by the field of norms construction of Fontaine and Wintenberger, as well as generalizations considered by Andreatta, Brinon, Faltings, Gabber, Ramero, Scholl, and most recently Scholze. Using Huber's formalism of adic spaces and Scholze's formalism of perfectoid spaces, we globalize the constructions to give several descriptions of the étale local systems on analytic spaces over p -adic fields. One of these descriptions uses a relative version of the Fargues-Fontaine curve.

Résumé (Théorie de Hodge p -adique dans le cas relatif : fondations)

Nous décrivons une approche nouvelle de la théorie de Hodge p -adique dans le cas relatif, fondée sur l'utilisation systématique des constructions des vecteurs de Witt et de la géométrie analytique non archimédienne à la manière de Berkovich et de Huber. Nous donnons un traitement approfondi des φ -modules sur un anneau de Robba relatif associé à un anneau de Banach parfait de caractéristique p , qui inclut le lien entre ces objets et les $\mathbb{Z}_p$ -systèmes locaux étales et les $\mathbb{Q}_p$ -systèmes locaux sur les espaces algébriques et analytiques associés à l'anneau de base, ainsi que le lien entre la cohomologie (pro-)étale et la φ -cohomologie. Nous établissons aussi un lien critique avec la caractéristique mixte en exhibant une équivalence de catégories tensorielles entre les algèbres étales finies sur une algèbre de Banach parfaite arbitraire sur un corps non trivialement normé complet de caractéristique p , et les algèbres étales finies sur une $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de Banach correspondante. Ceci redonne l'homéomorphisme entre les groupes de Galois absolus de $\mathbb{F}_p((\pi))$ et de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ donné par le corps des normes de Fontaine et Wintenberger, ainsi que des généralisations considérées par Andreatta, Brinon, Faltings, Gabber, Ramero, Scholl, et plus récemment Scholze. En utilisant le formalisme des espaces adiques de Huber et le formalisme des espaces perfectoides de Scholze, nous globalisons ces constructions afin de donner plusieurs descriptions des systèmes locaux étales sur des espaces analytiques sur des corps p -adiques. L'une de ces descriptions utilise une version relative de la courbe de Fargues-Fontaine.

CONTENTS

0. Introduction	9
0.1. Artin-Schreier theory and (φ, Γ) -modules	10
0.2. Arithmetic vs. geometric	10
0.3. Analytic spaces associated to Banach algebras	11
0.4. Perfectoid fields and algebras	12
0.5. Robba rings and slope theory	13
0.6. φ -modules and local systems	14
0.7. Contact with the work of Scholze	14
0.8. Further goals	16
Acknowledgments	17
1. Algebro-geometric preliminaries	19
1.1. Finite, flat, and projective modules	19
1.2. Comparing étale algebras	20
1.3. Descent formalism	23
1.4. Étale local systems	28
1.5. Semilinear actions	32
2. Spectra of nonarchimedean Banach rings	35
2.1. Seminorms on groups and rings	35
2.2. Banach rings and modules	37
2.3. The Gel'fand spectrum of a Banach ring	44
2.4. The adic spectrum of an adic Banach ring	48
2.5. Coherent sheaves on affinoid spaces	58
2.6. Affinoid systems	63
2.7. Glueing of finite projective modules	66
2.8. Uniform Banach rings	69

3. Perfect rings and strict p-rings	77
3.1. Perfect $\mathbb{F}_p$ -algebras	77
3.2. Strict p -rings	83
3.3. Norms on strict p -rings	88
3.4. Inverse perfection	92
3.5. The perfectoid correspondence for analytic fields	94
3.6. The perfectoid correspondence for adic Banach algebras	98
3.7. Preperfectoid and relatively perfectoid algebras	114
4. Robba rings and φ-modules	117
4.1. Slope theory over the Robba ring	117
4.2. Slope theory and Witt vectors	120
4.3. Comparison of slope theories	126
5. Relative Robba rings	129
5.1. Relative extended Robba rings	130
5.2. Reality checks	133
5.3. Sheaf properties	137
5.4. Some geometric observations	142
5.5. Compatibility with finite étale extensions	145
6. φ-modules	153
6.1. φ -modules and φ -bundles	153
6.2. Construction of φ -invariants	155
6.3. Vector bundles à la Fargues-Fontaine	157
7. Slopes in families	167
7.1. An approximation argument	167
7.2. Rank, degree, and slope	168
7.3. Pure models	169
7.4. Slope filtrations in geometric families	174
8. Perfectoid spaces	181
8.1. Some topological properties	181
8.2. Adic spaces	183
8.3. Perfectoid spaces	190
8.4. Étale local systems on adic spaces	191
8.5. φ -modules and local systems	194
8.6. A bit of cohomology	200
8.7. The relative Fargues-Fontaine curve	201
8.8. Ampleness on relative curves	205
8.9. B -pairs	212
9. Relative (φ, Γ)-modules	215
9.1. The pro-étale topology for adic spaces	215

9.2. Perfectoid subdomains	218
9.3. φ -modules and local systems	222
9.4. Comparison of cohomology	225
9.5. Comparison with classical p -adic Hodge theory	227
Bibliography	231

