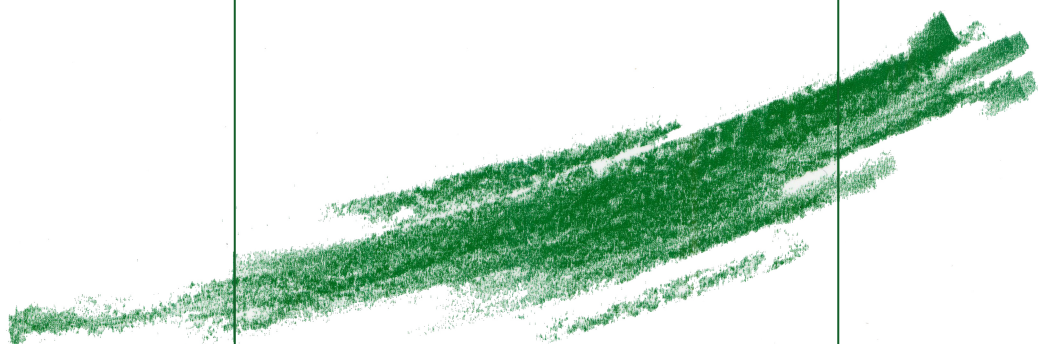


C O U R S   S P É C I A L I S É S  
C O L L E C T I O N   S M F

# Formes quadratiques sur un corps

Bruno KAHN



15



# **FORMES QUADRATIQUES SUR UN CORPS**

**Bruno Kahn**

### ***Comité de rédaction***

Antoine CHAMBERT-LOIR  
Julie DÉSERTI

Bertrand MAURY

Grégory MIERMONT (Directeur)

### ***Diffusion***

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency  
O-131, The Shopping Mall  
Arjun Marg, DLF Phase 1  
Gurgaon 122002, Haryana  
Inde

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

EDP Sciences  
17, avenue du Hoggar  
91944 les Ulis Cedex A  
France  
www.epdsciences.com

### ***Tarifs***

*Vente au numéro* : 55 € (\$ 82)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### ***Secrétariat : Nathalie Christiaën***

Cours Spécialisés

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2008

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-261-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

**COURS SPÉCIALISÉS 15**

# **FORMES QUADRATIQUES SUR UN CORPS**

**Bruno Kahn**

**Société Mathématique de France 2008**



## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Avant-propos</b> .....                                                              | vii |
| <b>1. La théorie de Witt</b> .....                                                     | 1   |
| 1.1. Définitions et notations .....                                                    | 1   |
| 1.2. Les théorèmes de Witt .....                                                       | 4   |
| 1.3. L'anneau de Witt .....                                                            | 7   |
| 1.4. Quelques exemples d'anneaux de Witt .....                                         | 10  |
| 1.5. Un théorème d'E. Artin et T. A. Springer .....                                    | 11  |
| 1.6. Exercices .....                                                                   | 13  |
| <b>2. La théorie de Pfister</b> .....                                                  | 15  |
| 2.1. Formes de Pfister .....                                                           | 15  |
| 2.2. Applications aux sommes de carrés ; le niveau d'un corps .....                    | 19  |
| 2.3. Formes de Pfister liées .....                                                     | 22  |
| 2.4. Théorèmes de Cassels-Pfister .....                                                | 23  |
| 2.5. Exercices .....                                                                   | 27  |
| <b>3. Corps de fonctions de quadriques</b> .....                                       | 29  |
| 3.1. Corps de fonctions .....                                                          | 29  |
| 3.2. Formes devenant hyperboliques sur le corps des<br>fonctions d'une quadrique ..... | 30  |
| 3.3. Le théorème d'Arason-Pfister .....                                                | 32  |
| 3.4. Exercices .....                                                                   | 34  |
| <b>4. La théorie de Knebusch</b> .....                                                 | 35  |
| 4.1. Hauteur .....                                                                     | 35  |
| 4.2. Formes de hauteur 1 .....                                                         | 36  |
| 4.3. Degré ; les idéaux $J_n$ .....                                                    | 37  |
| 4.4. Retour à la section 3.2 .....                                                     | 40  |
| 4.5. Exercices .....                                                                   | 41  |
| <b>5. Formes devenant isotropes sur le corps des fonctions d'une quadrique</b> .....   | 43  |
| 5.1. Généralités .....                                                                 | 43  |
| 5.2. Le théorème de Hoffmann .....                                                     | 44  |
| 5.3. Voisines .....                                                                    | 47  |

|                                                                         |            |
|-------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.4. Formes excellentes .....                                           | 49         |
| 5.5. Formes de Pfister croisées .....                                   | 53         |
| 5.6. Extensions excellentes .....                                       | 57         |
| 5.7. Formes de hauteur 2 .....                                          | 61         |
| 5.8. Exercices .....                                                    | 65         |
| <b>6. Invariants élémentaires .....</b>                                 | <b>67</b>  |
| 6.1. Le discriminant .....                                              | 67         |
| 6.2. L'algèbre de Clifford .....                                        | 69         |
| 6.3. Le groupe de Brauer-Wall .....                                     | 71         |
| 6.4. Exercices .....                                                    | 80         |
| <b>7. Le théorème de réduction d'indice</b>                             |            |
| <b>et ses applications .....</b>                                        | <b>81</b>  |
| 7.1. Le théorème de réduction d'indice .....                            | 81         |
| 7.2. Application I : déploiement générique .....                        | 84         |
| 7.3. Application II : le $u$ -invariant des corps .....                 | 85         |
| 7.4. Exercices .....                                                    | 89         |
| <b>8. Formes de basse dimension .....</b>                               | <b>91</b>  |
| 8.1. Formes de basse dimension .....                                    | 91         |
| 8.2. Retour au chapitre 5 pour les formes de basse dimension .....      | 100        |
| 8.3. Exercices .....                                                    | 108        |
| <b>9. Invariants supérieurs .....</b>                                   | <b>109</b> |
| 9.1. Invariants élémentaires et cohomologie galoisienne .....           | 109        |
| 9.2. $K$ -théorie de Milnor .....                                       | 109        |
| 9.3. Le triangle incomplet de Milnor .....                              | 110        |
| 9.4. Invariants cohomologiques supérieurs .....                         | 113        |
| 9.5. Le noyau de $H^n F \rightarrow H^n F(q)$ .....                     | 116        |
| 9.6. Le théorème d'Arason .....                                         | 118        |
| 9.7. Bijectivité de $a^n$ , $b^n$ et $e^n$ .....                        | 121        |
| 9.8. Application à l'isotropie des formes quadratiques .....            | 123        |
| 9.9. Exercices .....                                                    | 125        |
| <b>10. Descente .....</b>                                               | <b>127</b> |
| 10.1. L'anneau de Witt non ramifié et la cohomologie non ramifiée ..... | 127        |
| 10.2. Théorèmes de surjectivité .....                                   | 129        |
| 10.3. Deux problèmes de descente .....                                  | 132        |
| 10.4. Une première conjecture de descente .....                         | 132        |
| 10.5. Application à la hauteur et au degré .....                        | 134        |
| 10.6. Une deuxième conjecture de descente .....                         | 134        |
| 10.7. Exercices .....                                                   | 136        |
| <b>A. Rappels sur le groupe de Brauer .....</b>                         | <b>139</b> |

|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| A.1. Algèbres simples et semi-simples .....                                | 139        |
| A.2. Le groupe de Brauer .....                                             | 140        |
| A.3. Exemples .....                                                        | 143        |
| A.4. Exercice .....                                                        | 147        |
| <b>B. Rappels de cohomologie galoisienne .....</b>                         | <b>149</b> |
| B.1. Cohomologie des groupes finis .....                                   | 149        |
| B.2. Cohomologie des groupes profinis .....                                | 152        |
| B.3. Cohomologie galoisienne .....                                         | 153        |
| B.4. Le théorème 90 de Hilbert .....                                       | 153        |
| B.5. Groupe de Brauer et cohomologie galoisienne .....                     | 154        |
| B.6. Théorie de Kummer .....                                               | 156        |
| B.7. La longue suite exacte d'une extension quadratique .....              | 158        |
| B.8. Dimension cohomologique .....                                         | 159        |
| <b>C. Courbes algébriques .....</b>                                        | <b>161</b> |
| C.1. Valuations discrètes .....                                            | 161        |
| C.2. Extensions rationnelles .....                                         | 167        |
| C.3. Compatibilités .....                                                  | 169        |
| C.4. Courbes algébriques .....                                             | 170        |
| C.5. Le théorème de Riemann-Roch .....                                     | 174        |
| C.6. Réciprocité de Weil .....                                             | 175        |
| <b>D. Un aperçu sur les formes quadratiques en caractéristique 2 .....</b> | <b>177</b> |
| D.1. Introduction .....                                                    | 177        |
| D.2. Premières définitions .....                                           | 179        |
| D.3. Normalisation d'une forme quadratique .....                           | 181        |
| D.4. Diagonalisation d'une forme bilinéaire .....                          | 184        |
| D.5. Invariant d'Arf et algèbre de Clifford .....                          | 184        |
| D.6. Simplification de Witt - Décomposition de Witt .....                  | 185        |
| D.7. Anneau de Witt - Groupe de Witt .....                                 | 188        |
| D.8. Relation de sous-forme entre les formes quadratiques .....            | 189        |
| D.9. Formes bilinéaires - Formes totalement singulières .....              | 191        |
| D.10. Corps de fonctions - Théorèmes de sous-forme .....                   | 194        |
| D.11. Les formes de Pfister et leurs voisines .....                        | 195        |
| D.12. Isotropie sur les corps de fonctions des quadriques .....            | 200        |
| D.13. Déploiement standard des formes quadratiques .....                   | 205        |
| D.14. Un théorème de Fitzgerald et un autre de Knebusch .....              | 209        |
| D.15. Le théorème de norme .....                                           | 212        |
| D.16. Formes différentielles et corps de fonctions .....                   | 214        |
| D.17. Un invariant pour les formes totalement singulières .....            | 218        |
| D.18. Quelques calculs de noyaux de Witt .....                             | 222        |
| <b>E. Formes quadratiques et cycles algébriques .....</b>                  | <b>227</b> |

|                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| Introduction .....                                                        | 227 |
| E.1. Définitions et notations .....                                       | 229 |
| E.2. La théorie de Witt .....                                             | 230 |
| E.3. Le théorème de Springer .....                                        | 232 |
| E.4. La théorie de Pfister : puissances de $I$ .....                      | 232 |
| E.5. Corps de fonctions de quadriques .....                               | 234 |
| E.6. La théorie de Knebusch : déploiement générique .....                 | 235 |
| E.7. Équivalence birationnelle stable .....                               | 240 |
| E.8. Quatre résultats fondamentaux .....                                  | 242 |
| E.9. Trois applications .....                                             | 244 |
| E.10. Formes quadratiques et motifs : résultats de base .....             | 247 |
| E.11. Formes quadratiques et motifs : théories de Rost et de Vishik ..... | 258 |
| E.12. Quelques démonstrations .....                                       | 272 |
| <b>F. Solution de certains exercices</b> .....                            | 275 |
| Chapitre 1 .....                                                          | 275 |
| Chapitre 2 .....                                                          | 275 |
| Chapitre 3 .....                                                          | 276 |
| Chapitre 4 .....                                                          | 276 |
| Chapitre 5 .....                                                          | 278 |
| Chapitre 8 .....                                                          | 280 |
| <b>Bibliographie</b> .....                                                | 283 |
| <b>Glossaire</b> .....                                                    | 299 |
| <b>Index</b> .....                                                        | 301 |