Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 187
Nouvelle série

ESPACES $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ ET ENDOSCOPIE

J.-L. WALDSPURGER

2 0 2 5

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 51 € ($ 77)
Abonnement électronique : 128 € ($ 192)
Abonnement avec supplément papier : 220 €, hors Europe : 265 € ($ 397)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
memoires@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-37905-218-7

doi:10.24033/msmf.494

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

MÉMOIRES DE LA SMF 187

ESPACES $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ ET ENDOSCOPIE

Jean-Loup Waldspurger

Société Mathématique de France 2025

J.-L. Waldspurger
Institut de mathématiques de Jussieu-Paris rive gauche,,
4 place Jussieu, Boîte courrier 247, 75252 Paris Cedex 05, France.
E-mail : `jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr`

Soumis le 3 janvier 2022, accepté le 20 janvier 2023.

***Classification mathématique par sujets* (2000). –** 22 E 50.

***Mots-clefs.* –** Transfert endoscopique, stabilité, faisceaux-caractères, éléments topologiquement nilpotents.

***Key words and phrases.* –** Endoscopic transfer, stability, character-sheaves, topologically nilpotent elements.

ESPACES $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ ET ENDOSCOPIE

Jean-Loup Waldspurger

Résumé. **–** Soient F un corps p-adique et G un groupe réductif connexe défini sur F. On suppose que p est « grand ». Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et introduisons la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, normalisée d'une façon habituelle. Dans un article précédent, on a défini l'espace $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ des fonctions $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telles que les intégrales orbitales de f et de $\hat{f}$ s'annulent en tout élément de $\mathfrak{g}(F)$ qui n'est pas topologiquement nilpotent. Ces espaces sont conservés par transfert endoscopique. Ici, on suppose que G est absolument quasi-simple et simplement connexe et on définit une décomposition de $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ en somme directe de sous-espaces de sorte que les propriétés relatives à l'endoscopie deviennent claires dans chaque sous-espace. En particulier, si G est quasi-déployé, on décrit le sous-espace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$ des éléments « stables » de $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$.

Abstract **($\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ spaces and endoscopy). –** Let F be a p-adic field and let G be a connected reductive group defined over F. We assume p is large. Denote by $\mathfrak{g}$ the Lie algebra of G. We normalize suitably a Fourier-transform $f \mapsto \hat{f}$ on $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. In a preceeding paper, we have defined the space $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ of functions $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ such that the orbital integrals of f and of $\hat{f}$ are 0 for each element of $\mathfrak{g}(F)$ which is not topologically nilpotent. These spaces are compatible with endoscopic transfer. We assume here that G is absolutely quasi-simple and simply connected. We define a decomposition of the space $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ in a direct sum of subspaces such that the endoscopic transfer becomes (more or less) clear on each subspace. In particular, if G is quasi-split, we describe the subspace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$ of "stable" elements in $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soient F une extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$ et G un groupe réductif connexe défini sur F. On impose que p est grand relativement à G. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Introduisons l'espace $I(\mathfrak{g}(F))$ qui est le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions f dont les intégrales orbitales $I^G(X,f)$ sont nulles pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$. Dans l'article **[12]**, on a introduit un sous-espace de dimension finie $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F)) \subset I(\mathfrak{g}(F))$. En définissant une transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ convenablement normalisée, on peut le caractériser de la façon suivante. C'est l'image dans $I(\mathfrak{g}(F))$ du sous-espace des fonctions $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telles que $I^G(X,f) = I^G(X,\hat{f}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ qui n'est pas topologiquement nilpotent. On peut aussi le décrire à l'aide de l'immeuble de Bruhat-Tits et la théorie des faisceaux-caractères de Lusztig. Introduisons l'immeuble du groupe adjoint G_{AD}. Il est décomposé en facettes et on note $S(G)$ l'ensemble des sommets. À $s \in S(G)$ on associe un sous-groupe parahorique $K_s^0 \subset G(F)$ et son plus grand sous-groupe distingué pro-p-unipotent K_s^+. D'après Bruhat et Tits, il existe un groupe réductif connexe G_s défini sur le corps résiduel $\mathbb{F}_q$ tel que $K_s^0/K_s^+ = G_s(\mathbb{F}_q)$. Dans $\mathfrak{g}(F)$, on a de façon similaire une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{k}_s$ (où $\mathfrak{o}_F$ est l'anneau des entiers de F) et une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{k}_s^+$, de sorte que $\mathfrak{k}_s/\mathfrak{k}_s^+ = \mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ (où $\mathfrak{g}_s$ est l'algèbre de Lie de G_s). Toute fonction définie sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ se relève en une fonction sur $\mathfrak{k}_s$ et s'étend par 0 hors de $\mathfrak{k}_s$ en une fonction définie sur $\mathfrak{g}(F)$. Notons $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ l'espace engendré par les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères définis sur $\mathfrak{g}_s$ qui sont cuspidaux, à support nilpotent et invariants par l'action de Frobenius. Par le procédé ci-dessus, on considère $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ comme un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Alors $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ est l'image dans $I(\mathfrak{g}(F))$ de la somme de ces sous-espaces $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ sur tous les sommets $s \in S(G)$. L'intérêt de l'espace $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ est qu'il nous semble jouer un rôle crucial dans deux problèmes concernant la théorie de l'endoscopie de Langlands : d'une part, les propriétés endoscopiques de l'espace des distributions invariantes à support nilpotent, cf. **[11]** et **[2]** ; d'autre part, la détermination des paquets stables de représentations tempérées de niveau 0, cf. **[7]**.

Dans cet ouvrage, nous supposons que G est absolument quasi-simple et simplement connexe. Nous nous proposons d'éclaicir partiellement les propriétés de l'espace $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ relatives à l'endoscopie.

Il est facile de décrire une base de l'espace $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ (ou plus exactement d'un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ qui s'envoie bijectivement sur $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$). On fixe un sous-ensemble $\underline{S}(G) \subset S(G)$ de représentants des orbites pour l'action de $G(F)$ dans $S(G)$. Pour tout $s \in \underline{S}(G)$, on décrit les faisceaux-caractères définis sur $\mathfrak{g}_s$ qui sont cuspidaux, à support nilpotent et invariants par l'action de Frobenius. Alors, quand s décrit $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$, les fonctions caractéristiques de ces faisceaux (identifiées comme ci-dessus à des éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$) forment une base de $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$. Remarquons que l'on tombe tout de suite sur une difficulté calculatoire : il n'y a pas de normalisation canonique des fonctions caractéristiques en question, notre base n'est bien définie qu'à des scalaires près. En fait, il est plus opportun de modifier la base ainsi décrite en tenant compte de l'action de $G_{\mathrm{AD}}(F)$ sur l'immeuble, c'est-à-dire en regroupant les sommets qui sont reliés par cette action. On décrira une telle base sur laquelle l'action de $G_{\mathrm{AD}}(F)$ se lit bien. Précisément, pour chaque groupe G, on définira un ensemble fini $\mathcal{X}$ de nature combinatoire. Pour chaque $x \in \mathcal{X}$, on définira un sous-espace $\mathrm{FC}_x \subset \mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ qui possède une base formée de combinaisons linéaires simples des éléments de base décrits ci-dessus. On prouvera que

$$(1) \qquad \mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F)) = \bigoplus_{x \in \mathcal{X}} \mathrm{FC}_x.$$

Dans de nombreux cas, FC_x sera une droite mais il y a aussi des cas où cet espace sera de dimension strictement supérieure à 1.

Supposons un instant que G soit quasi-déployé. On définit l'espace $\mathrm{SI}(\mathfrak{g}(F))$ comme le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions f dont les intégrales orbitales stables $S^G(X, f)$ sont nulles pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple régulier. Levons l'hypothèse de quasi-déploiement. Introduisons un ensemble $\mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)$ de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G. À une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ est associée un groupe endoscopique G' qui est quasi-déployé sur F (soulignons qu'une donnée endoscopique est plus riche que la simple donnée de ce groupe G', deux données non équivalentes pouvant avoir le même groupe associé). Soit $\mathbf{G}' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)$. Modulo le choix d'un facteur de transfert, on définit l'application de transfert $\mathrm{transfert}^{\mathbf{G}'} : I(\mathfrak{g}(F)) \to \mathrm{SI}(\mathfrak{g}'(F))$. On note $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ le sous-espace des $f \in \mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ telles que $\mathrm{transfert}^{\mathbf{G}''}(f) = 0$ pour tout $\mathbf{G}'' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)$, $\mathbf{G}'' \neq \mathbf{G}'$. Il y a toujours une unique donnée endoscopique elliptique dont le groupe associé est une forme intérieure quasi-déployée de G, on la note $\mathbf{G}$. Dans le cas où G est quasi-déployé, on pose $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F)) = \mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$. Posons

$$(2) \qquad \mathrm{FC}^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)) = \bigoplus_{\mathbf{G}' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)} \mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}'(F))^{\mathrm{Out}(\mathbf{G}')}.$$

Le groupe $\mathrm{Out}(\mathbf{G}')$ est le groupe fini des automorphismes « extérieurs » de la donnée $\mathbf{G}'$, il agit naturellement sur $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}'(F))$ et $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}'(F))^{\mathrm{Out}(\mathbf{G}')}$ est le sous-espace des invariants.

On a prouvé dans [**12**] que

$$\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F)) = \bigoplus_{\mathbf{G}' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)} \mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}'),$$

et que l'application $\mathrm{transfert} = \bigoplus_{\mathbf{G}' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)} \mathrm{transfert}^{\mathbf{G}'}$ établissait un isomorphisme

$$\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F)) \to \mathrm{FC}^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)). \tag{3}$$

On définira un ensemble fini $\mathcal{Y}$ de nature combinatoire. Pour chaque $y \in \mathcal{Y}$, on définira un sous-espace $\mathrm{FC}^{\mathcal{E}}_y \subset \mathrm{FC}^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$. On définira une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et notre résultat principal sera que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a l'égalité

$$\mathrm{transfert}(\mathrm{FC}_x) = \mathrm{FC}^{\mathcal{E}}_{\varphi(x)}. \tag{4}$$

On est conscient que la présentation ci-dessus est très incomplète : pour obtenir ces résultats, il suffirait de poser $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1\}$, $\mathrm{FC}_1 = \mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ et $\mathrm{FC}^{\mathcal{E}}_1 = \mathrm{FC}^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$. Mais le lecteur constatera que nos décompositions des espaces $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ et $\mathrm{FC}^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ sont tout à fait non triviales. Dans presque tous les cas, chaque sous-espace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}'(F))^{\mathrm{Out}(\mathbf{G}')}$ de $\mathrm{FC}^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ est une somme de sous-espaces $\mathrm{FC}^{\mathcal{E}}_y$ (il y a une exception dans le cas où G est quasi–déployé et non déployé de type D_n avec n pair, cf. 6.11 ; dans ce cas il y a des paires de données endoscopiques que nous n'avons pas réussi à distinguer). En particulier, quand G est quasi-déployé, nos résultats décrivent dans tous les cas le sous-espace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$ comme la somme des FC_x pour x parcourant un sous-ensemble $\mathcal{X}^{\mathrm{st}}$ de $\mathcal{X}$. On résumera au paragraphe 9 la description de cet espace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$ dans chaque cas. À titre d'exemple, donnons une conséquence dans le cas où G est de type E_8. Dans ce cas, on a l'égalité $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F)) = \mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$ et

$$\dim(\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))) = 3 + 4\delta_3(q-1) + 2\delta_4(q-1) + 4\delta_5(q-1),$$

où, pour tout entier $n \geq 1$, on a noté δ_n la fonction caractéristique de $n\mathbb{Z}$. Remarquons que, si $q-1$ est divisible par 60, la dimension ci-dessus est le nombre de représentations unipotentes cuspidales du groupe sur $\mathbb{F}_q$ de type E_8.

Indiquons les grandes lignes de la démonstration en nous restreignant au cas quasi-déployé. On décrit facilement l'ensemble $\mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)$, cf. 1.9. En raisonnant par récurrence sur la dimension de G, on peut décrire les espaces $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}'(F))$ pour toute donnée $\mathbf{G}' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)$, $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$. L'action du groupe $\mathrm{Out}(\mathbf{G}')$ se lit bien dans nos descritions et on en déduit l'espace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}'(F))^{\mathrm{Out}(\mathbf{G}')}$. Puisque l'on a déjà décrit l'espace $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ et que l'on connaît donc sa dimension, l'isomorphisme (3) est alors suffisant pour déterminer la dimension du sous-espace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$, qui est le seul sous-espace de $\mathrm{FC}^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ que la récurrence ne permet pas de connaître. Pour déterminer la bijection φ et pour prouver l'égalité principale (4), on utilise les trois arguments ci-dessous.

D'abord l'action du groupe adjoint $G_{\mathrm{AD}}(F)$. Toute donnée endoscopique $\mathbf{G}' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)$ détermine un caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ de ce groupe, trivial sur l'image naturelle de $G(F)$, et les éléments de $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ se transforment par $G_{\mathrm{AD}}(F)$ selon ce caractère. Dans beaucoup de cas, on pourra aussi associer à tout $x \in \mathcal{X}$ un tel caractère ξ_x de sorte que les éléments de FC_x se transforment par $G_{\mathrm{AD}}(F)$ selon ce caractère. Dans ce cas, on aura forcément $\mathrm{FC}_x \subset_{\mathbf{G}' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G), \xi_{\mathbf{G}'} = \xi_x} \mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$. Remarquons que cet argument est suffisant dans le cas d'un groupe déployé de type A_{n-1}, les caractères de $G_{\mathrm{AD}}(F)$ permettant alors de distinguer les différentes droites FC_x et les différentes données $\mathbf{G}'$.

Moy et Prasad ont défini des $\mathfrak{o}_F$-réseaux $\mathfrak{k}_{x,r} \subset \mathfrak{g}(F)$ où x est un point de l'immeuble de G_{AD} et r est un nombre réel. Ils sont décroissants en r. Pour un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$, on appelle profondeur de X la borne supérieure (éventuellement infinie) de l'ensemble des réels r tels qu'il existe un point x de sorte que $X \in \mathfrak{k}_{x,r}$. Si X est semi-simple régulier, cette borne est finie et est atteinte. On note $r(X)$ cette profondeur. Soit $y \in \mathcal{Y}$. Supposons pour simplifier que $\mathrm{FC}^{\mathcal{E}}_y$ soit une droite égale à $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}'(F))^{\mathrm{Out}(\mathbf{G}')}$ pour une donnée $\mathbf{G}' \in \mathrm{Endo}_{\mathrm{ell}}(G)$ (c'est souvent le cas). Fixons un élément non nul $f'_y \in \mathrm{FC}^{\mathcal{E}}_y$. Supposons que l'on connaisse un élément $Y_y \in \mathfrak{g}'(F)$ tel que $S^{G'}(Y_y, f'_y) \neq 0$ et que l'on connaisse la profondeur $r(Y_y)$. Soit $x \in \mathcal{X}$. Supposons que l'on connaisse un réel r_x tel que le support de tout élément de FC_x soit formé d'éléments $X \in \mathfrak{g}(F)$ tels que $r(X) \geq r_x$. Si $r_x > r_{Y_y}$, alors $\mathrm{transfert}^{\mathbf{G}'}(f) = 0$ pour tout $f \in \mathrm{FC}_x$. En effet, écrivons $\mathrm{transfert}^{\mathbf{G}'}(f) = cf'_y$ avec $c \in \mathbb{C}$. On a alors $S^{G'}(Y_y, \mathrm{transfert}^{\mathbf{G}'}(f)) = cS^{G'}(Y_y, f'_y)$. Par définition du transfert endoscopique, le membre de gauche est combinaison linéaire d'intégrales orbitales $I^G(X, f)$ pour des éléments $X \in \mathfrak{g}(F)$ correspondant à Y_y. Un tel élément a la même profondeur que Y_y, c'est-à-dire $r(Y_y)$. Puisque $r_x > r(Y_y)$, la classe de conjugaison de X ne coupe pas le support de f donc $I^G(X, f) = 0$. Donc $0 = S^{G'}(Y_y, \mathrm{transfert}^{\mathbf{G}'}(f)) = cS^{G'}(Y_y, f'_y)$, d'où $c = 0$.

Le troisième argument est que l'espace $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ est contenu dans celui des fonctions cuspidales $I_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{g}(F)) \subset I(\mathfrak{g}(F))$ et est muni du produit elliptique, qui est un produit hermitien défini positif. La décomposition (1) est orthogonale pour ce produit. Via l'isomorphisme (3), l'espace $\mathrm{FC}^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ est aussi muni d'un tel produit et la décomposition (2) est orthogonale. Cela a de multiples conséquences. Par exemple, si on réussit à déterminer l'image de $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}'(F))^{\mathrm{Out}(\mathbf{G}')}$ dans $\mathrm{FC}(\mathfrak{g}(F))$ pour tout $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$, alors l'espace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$ est lui-aussi déterminé : c'est l'orthogonal de la somme des espaces précédents pour $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$. Ou encore si le deuxième argument est valide pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, celui-ci nous dit plus ou moins que l'isomorphisme (3) est triangulaire pour des ordres convenables sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Puisqu'il est hermitien, il est forcément diagonal. On renvoie à 3.2 pour une élaboration plus précise de cet argument.

Le premier paragraphe est consacré à divers préliminaires sur les immeubles et les données endoscopiques. On y démontre aussi quelques lemmes galoisiens élémentaires. Le deuxième paragraphe rappelle la description due à Lusztig des faisceaux-caractères cuspidaux à support unipotent pour les groupes finis. Au troisième paragraphe, on présente la façon dont nous décrirons ensuite nos résultats dans les différents cas. Les paragraphes 4 et 5 sont consacrés aux groupes de type A_{n-1} (on a préféré A_{n-1} à A_n car on utilise beaucoup d'algèbre linéaire et on préfère travailler avec $\mathrm{GL}(n)$ plutôt qu'avec $\mathrm{GL}(n+1)$). En particulier, on traite en détail le cas des groupes unitaires associés à une extension quadratique E/F ramifiée. Pour les groupes classiques, c'est le résultat le plus nouveau de notre étude, les autres cas étant largement contenus dans [**11**]. Les groupes de type B_n, C_n ou D_n sont considérés dans les paragraphes 6 et 7. Pour la raison que l'on vient de donner, on s'est plusieurs fois contenté d'indiquer brièvement les constructions nécessaires, en laissant les détails au lecteur. Les groupes exceptionnels (y compris celui de D_4 trialitaire qui est de fait exceptionnel) sont traités au paragraphe 8. Ils ne sont d'ailleurs pas les plus difficiles. Signalons que le groupe de type G_2 a été traité par DeBacker et Kazhdan, cf. [**2**]. Comme on l'a dit, le paragraphe 9 est un résumé de la description que l'on a obtenue de l'espace $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$.

Nos résultats sont complets quant à la détermination des espaces $\mathrm{FC}^{\mathrm{st}}(\mathfrak{g}(F))$ pour les groupes G quasi-déployés. Les résultats de transfert sont beaucoup plus imprécis. Pour obtenir une description exacte, il faudrait améliorer trois points. D'abord, comme on l'a dit ci-dessus, définir précisément les normalisations des fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères. Cette question nous paraît liée à la conjecture de Lusztig reliant ces fonctions aux caractères de représentations de groupes finis. D'autre part, calculer plus précisément diverses intégrales orbitales dont nous nous contentons de prouver la non-nullité. Enfin calculer explicitement divers facteurs de transfert. Pour les groupes classiques, c'est une simple question de patience mais l'auteur avoue se sentir un peu démuni dans le cas des groupes exceptionnels.