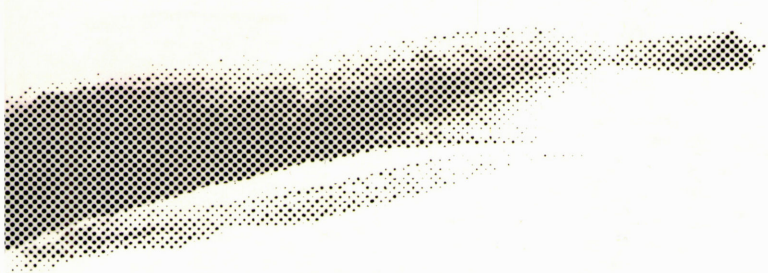


# Cours Spécialisés

COLLECTION SMF



**Exercices corrigés  
de théorie analytique  
et probabiliste des nombres**

**Gérald Tenenbaum**  
*en collaboration avec*

**Jie Wu**

**Numéro 2**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

## Comité de Rédaction

Michèle AUDIN  
Daniel BARLET (Directeur)  
Jean-Benoît BOST  
Paul-Louis HENNEQUIN

Rémi LANGEVIN  
François LOESER  
Joseph OESTERLÉ  
Pierre SCHAPIRA

## Diffusion

S.M.F. (vente directe)  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré  
11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris cedex 05, France

MAISON DE LA S.M.F.  
Société Mathématique de France  
B.P. 67  
13274 Marseille Cedex 09  
France

A.M.S.  
American Mathematical Society  
P.O. BOX 6248, Providence  
Rhode Island 02940, USA

## Tarifs

(frais de port non compris)

Prix membres SMF : 130 FF  
Prix membres AMS : 180 FF (\$36)  
Prix public : 200 FF

Directeur de la publication : R. Langevin

© Société Mathématique de France 1996

ISBN 2-85629-045-0





# **Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres**

---

**Gérald Tenenbaum**

*Professeur à l'Université Henri Poincaré–Nancy 1*

*en collaboration avec*

**Jie Wu**

*Chargé de Recherches au CNRS*

**classification AMS : 11-01**

# Table des Matières

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Avant-propos</b> .....                                         | ix |
| <b>Notations</b> .....                                            | xi |
| <b>Tome I : Méthodes élémentaires</b> .....                       | 1  |
| <b>Chapitre I.0 Quelques outils d'analyse réelle</b>              |    |
| Énoncés .....                                                     | 3  |
| Solutions .....                                                   | 4  |
| <b>Chapitre I.1. Les nombres premiers</b>                         |    |
| Énoncés .....                                                     | 6  |
| Solutions .....                                                   | 8  |
| <b>Chapitre I.2 Fonctions arithmétiques</b>                       |    |
| Énoncés .....                                                     | 13 |
| Solutions .....                                                   | 15 |
| <b>Chapitre I.3 Ordres moyens</b>                                 |    |
| Énoncés .....                                                     | 20 |
| Solutions .....                                                   | 23 |
| <b>Chapitre I.4 Méthodes de crible</b>                            |    |
| Énoncés .....                                                     | 33 |
| Solutions .....                                                   | 37 |
| <b>Chapitre I.5 Ordres extrémaux</b>                              |    |
| Énoncés .....                                                     | 43 |
| Solutions .....                                                   | 45 |
| <b>Chapitre I.6 La méthode de van der Corput</b>                  |    |
| Énoncés .....                                                     | 49 |
| Solutions .....                                                   | 50 |
| <b>Tome II : Méthodes d'analyse complexe</b> .....                | 55 |
| <b>Chapitre II.1 Fonctions génératrices : séries de Dirichlet</b> |    |
| Énoncés .....                                                     | 57 |
| Solutions .....                                                   | 59 |

|                                                                                         |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Chapitre II.2 Formules de sommation</b>                                              |            |
| Énoncés .....                                                                           | 63         |
| Solutions .....                                                                         | 64         |
| <b>Chapitre II.3 La fonction zêta de Riemann</b>                                        |            |
| Énoncés .....                                                                           | 65         |
| Solutions .....                                                                         | 70         |
| <b>Chapitre II.4 Le théorème des nombres premiers et<br/>    l'hypothèse de Riemann</b> |            |
| Énoncés .....                                                                           | 78         |
| Solutions .....                                                                         | 80         |
| <b>Chapitre II.5 La méthode de Selberg–Delange</b>                                      |            |
| Énoncés .....                                                                           | 84         |
| Solutions .....                                                                         | 87         |
| <b>Chapitre II.6 Deux applications arithmétiques</b>                                    |            |
| Énoncés .....                                                                           | 97         |
| Solutions .....                                                                         | 100        |
| <b>Chapitre II.7 Théorèmes taubériens</b>                                               |            |
| Énoncés .....                                                                           | 105        |
| Solutions .....                                                                         | 109        |
| <b>Chapitre II.8 Nombres premiers en progressions<br/>    arithmétiques</b>             |            |
| Énoncés .....                                                                           | 117        |
| Solutions .....                                                                         | 120        |
| <b>Tome III : Méthodes probabilistes .....</b>                                          | <b>127</b> |
| <b>Chapitre III.1 Densités</b>                                                          |            |
| Énoncés .....                                                                           | 129        |
| Solutions .....                                                                         | 133        |
| <b>Chapitre III.2 Fonction de répartition d'une fonction<br/>    arithmétique</b>       |            |
| Énoncés .....                                                                           | 140        |
| Solutions .....                                                                         | 144        |



|                       |                                                                                                |     |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Chapitre III.3</b> | <b>Ordre normal</b>                                                                            |     |
| Énoncés               | .....                                                                                          | 155 |
| Solutions             | .....                                                                                          | 162 |
| <b>Chapitre III.4</b> | <b>Répartition des fonctions additives et valeur<br/>moyenne des fonctions multiplicatives</b> |     |
| Énoncés               | .....                                                                                          | 179 |
| Solutions             | .....                                                                                          | 185 |
| <b>Chapitre III.5</b> | <b>Entiers sans grand facteur premier.<br/>La méthode du col</b>                               |     |
| Énoncés               | .....                                                                                          | 196 |
| Solutions             | .....                                                                                          | 201 |
| <b>Chapitre III.6</b> | <b>Entiers sans petit facteur premier</b>                                                      |     |
| Énoncés               | .....                                                                                          | 213 |
| Solutions             | .....                                                                                          | 217 |
| <b>Bibliographie</b>  | .....                                                                                          | 227 |
| <b>Index</b>          | .....                                                                                          | 247 |

