

460

ASTÉRISQUE

2025

CELLULAR E_k -ALGEBRAS

S. Galatius, A. Kupers & O. Randal-Williams

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 460, 2025

Comité de rédaction

Eleonore DI NEZZA Rémi RHODES
Alessandra IOZZI Sug WOO SHIN
Antoine CHAMBERT-LOIR (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	http://www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 72 € (\$108)

Abonnement Europe : 818 €, hors Europe : 889 € (\$1333)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2025

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-37905-219-4

doi:10.24033/ast.1249

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

460

ASTÉRISQUE

2025

CELLULAR E_k -ALGEBRAS

S. Galatius, A. Kupers & O. Randal-Williams

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Søren Galatius

Department of Mathematics, Columbia University, 2990 Broadway, New York NY
10027, USA
`sg4379@columbia.edu`

Alexander Kupers

Department of Computer and Mathematical Sciences, University of Toronto Scarbor-
ough, 1265 Military Trail, Toronto, ON M1C 1A4, Canada
`a.kupers@utoronto.ca`

Oscar Randal-Williams

Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WB, UK
`o.randal-williams@dpmms.cam.ac.uk`

Soumis le 12 juillet 2021, accepté le 4 décembre 2023.

Mathematical Subject Classification (2010). – 57R90, 18N40, 55R40, 55P35, 55P48, 57T30.

Keywords. – E_k -algebras, cellular approximation, indecomposables, bar construction, homological stability.

Mots-clefs. – E_k -algèbres, approximation cellulaire, indécomposables, construction barre, stabilité homologique.

CELLULAR E_k -ALGEBRAS

by

S. Galatius, A. Kupers & O. Randal-Williams

Abstract. – We give a set of foundations for cellular E_k -algebras which are especially convenient for applications to homological stability. We provide conceptual and computational tools in this setting, such as filtrations, a homology theory for E_k -algebras with a Hurewicz theorem, CW approximations, and many spectral sequences, which shall be used for such applications in future papers.

Résumé (E_k -algèbres cellulaires). – Nous bâtissons les fondations de la théorie des E_k -algèbres cellulaires, en vue d'applications en stabilité homologique. Nous donnons des outils conceptuels et des outils de calcul, y compris des filtrations, une théorie d'homologie pour les E_k -algèbres avec un théorème de Hurewicz, des approximations cellulaires, et plusieurs suites spectrales.

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. E_k -algebras	2
1.2. Cellular E_k -algebras	3
1.3. E_k -homology	4
1.4. Computing E_k -homology	5
1.5. Towards applications	6
1.6. Guide for the reader	7
Acknowledgments	8
 Part I. Category theory of algebras over a monad	 9
2. Contexts for category theory	11
2.1. Axioms for categories	11
2.2. Examples	15
2.3. Module categories	18
2.4. Diagram categories	19
3. Sifted monads and indecomposables	23
3.1. Monads and adjunctions	23
3.2. Sifted monads	24
3.3. The basepoint monad	27
3.4. Morphisms of monads and indecomposables	29
4. Monads associated to operads	33
4.1. Symmetric, braided and ordered sequences	33
4.2. Operads	37
4.3. Operads and lax monoidal functors	38
4.4. Non-unitary operads and unitalization	40
4.5. Augmentations of operads	41
4.6. Operads in simplicial sets	44
5. Filtered algebras	47
5.1. Graded and filtered objects	47
5.2. Functors between filtered and unfiltered objects	48
5.3. Monoidality	49
5.4. The canonical multiplicative filtration	53