

461

ASTÉRISQUE

2025

ISOLATED QUOTIENT SINGULARITIES
IN POSITIVE CHARACTERISTIC

C. Liedtke, G. Martin & Y. Matsumoto

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 461, 2025

Comité de rédaction

Eleonore DI NEZZA Rémi RHODES
Alessandra IOZZI Sug WOO SHIN
Antoine CHAMBERT-LOIR (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	http://www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 51 € (\$77)

Abonnement Europe : 818 €, hors Europe : 889 € (\$1333)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2025

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-37905-220-0

doi:10.24033/ast.1250

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

461

ASTÉRISQUE

2025

ISOLATED QUOTIENT SINGULARITIES
IN POSITIVE CHARACTERISTIC

C. Liedtke, G. Martin & Y. Matsumoto

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Christian Liedtke

TUM School of CIT

Department of Mathematics (M11)

Boltzmannstr. 3

85748 Garching bei München, Germany

liedtke@ma.tum.de

Gebhard Martin

Mathematisches Institut der Universität Bonn

Endenicher Allee 60

53115 Bonn, Germany

gmartin@math.uni-bonn.de

Yuya Matsumoto

Department of Mathematics

Faculty of Science and Technology

Tokyo University of Science

2641 Yamazaki, Noda

Chiba, 278-8510, Japan

matsumoto_yuya@rs.tus.ac.jp

matsumoto.yuya.m@gmail.com

Soumis le 2 janvier 2022, révisé le 19 septembre 2023, accepté le 21 décembre 2023.

Mathematical Subject Classification (2010). – 14L15, 13A50, 14J17, 13A35, 14L30, 20C20.

Keywords. – Klein singularity, quotient singularity, canonical and log terminal singularities, linearly reductive group scheme, positive characteristic, F-singularity, deformations of singularities, canonical and klt singularities, torsor, group scheme, Dieudonné theory, rational double point, local Picard functor.

Mots-clefs. – Singularité de Klein, singularité quotient, singularités canoniques et log-terminales, schéma en groupes linéairements réductifs, caractéristique positive, F-singularité, déformations de singularités, singularités canoniques et klt, torseur, schéma en groupes, théorie de Dieudonné, point double rationnel, foncteur local de Picard.

ISOLATED QUOTIENT SINGULARITIES IN POSITIVE CHARACTERISTIC

by

C. Liedtke, G. Martin & Y. Matsumoto

Abstract. – This book deals with isolated quotient singularities by finite group schemes over algebraically closed fields of positive characteristic. In the first part, we study isolated quotient singularities by finite and linearly reductive group schemes and show that they satisfy many, but not all, of the known properties of finite quotient singularities in characteristic zero. This includes the reconstruction of the quotient presentation from the singularity, Schlessinger’s rigidity theorem, and classification results of Klein and Brieskorn. In the second part, we study torsors over the punctured spectrum of an isolated singularity, with an emphasis on rational double point singularities. As applications, we show that not all rational double points are quotient singularities and we extend the Flenner-Mumford criterion for smoothness of a normal surface germ to positive characteristic, generalizing work of Esnault and Viehweg.

Résumé (Singularités isolées quotients en caractéristique positive). – Ce livre traite les singularités isolées quotients par des schémas en groupes finis sur des corps algébriquement clos de caractéristique positive. Dans la première partie, on étudie les singularités isolées quotients par des schémas en groupes finis et linéairement réductifs et montre qu’elles satisfont à beaucoup – mais pas à toutes – les propriétés des singularités quotients finis en caractéristique zéro. Cela inclut la reconstruction de la présentation en quotient à partir de la singularité, le théorème de rigidité de Schlessinger et des résultats de classification de Klein et Brieskorn. Dans la deuxième partie, on étudie des toreseurs sous des schémas en groupes finis sur le spectre épointé d’une singularité en mettant l’accent sur les singularités de type point double rationnel. Comme application, on montre que les points rationnels doubles ne sont pas tous des singularités quotients et on étend le critère de Flenner-Mumford de lissité d’une germe de surface normale à la caractéristique positive, généralisant les travaux de Esnault et Viehweg.

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. Quotient singularities over the complex numbers	1
1.2. Properties of complex isolated quotient singularities	4
1.3. Local fundamental groups	5
1.4. Counterexamples in positive characteristic	6
1.5. Linearly reductive quotient singularities	7
1.6. Torsors over the rational double points in characteristic p	10
1.7. Outlook	15
2. Linearly Reductive Quotient Singularities	21
2.1. Introduction	21
2.2. Linearly reductive group schemes	27
2.3. Very small linearly reductive subgroup schemes of $\mathbf{GL}_d$	34
2.4. Generalities on F-singularities	40
2.5. Local fundamental groups and class groups	41
2.6. Quotient singularities and linearization	43
2.7. Properties of lrq singularities	46
2.8. Uniqueness of the quotient presentation	52
2.9. Rigidity of lrq singularities in dimension $d \geq 4$	56
2.10. Deformation theory of lrq threefolds	58
2.11. F-regular surfaces are lrq surfaces	65
2.12. Riemenschneider's conjecture for lrq singularities	68
3. Torsors over the Rational Double Points in Characteristic p	75
3.1. Introduction	75
3.2. F-regular and canonical singularities in dimension two	82
3.3. Finite group schemes	83
3.4. Maximal $\mathcal{C}$ -subsheaves	90
3.5. Local torsors and how to detect them	94
3.6. Local torsors over the rational double points	106
3.7. Detecting smoothness via local torsors	115
3.8. Very small actions and quotient singularities	120
3.9. Quotient and non-quotient RDPs	126
3.10. Pathologies and counter-examples	144
Bibliography	153