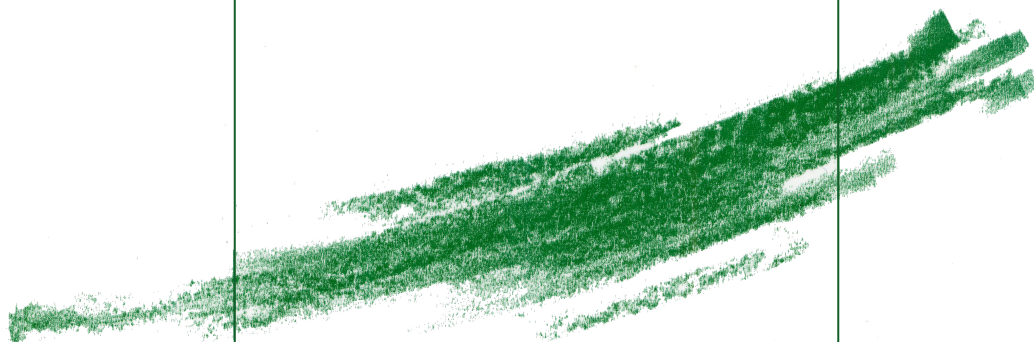


C O U R S S P É C I A L I S É S
C O L L E C T I O N S M F

Formes quadratiques sur un corps

Bruno KAHN



15

FORMES QUADRATIQUES SUR UN CORPS

Bruno Kahn

Comité de rédaction

Antoine CHAMBERT-LOIR
Julie DÉSERTI

Bertrand MAURY

Grégory MIERMONT (Directeur)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis Cedex A
France
www.epdsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 55 € (\$ 82)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2008

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-261-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

COURS SPÉCIALISÉS 15

FORMES QUADRATIQUES SUR UN CORPS

Bruno Kahn

Société Mathématique de France 2008

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	vii
1. La théorie de Witt	1
1.1. Définitions et notations	1
1.2. Les théorèmes de Witt	4
1.3. L'anneau de Witt	7
1.4. Quelques exemples d'anneaux de Witt	10
1.5. Un théorème d'E. Artin et T. A. Springer	11
1.6. Exercices	13
2. La théorie de Pfister	15
2.1. Formes de Pfister	15
2.2. Applications aux sommes de carrés ; le niveau d'un corps	19
2.3. Formes de Pfister liées	22
2.4. Théorèmes de Cassels-Pfister	23
2.5. Exercices	27
3. Corps de fonctions de quadriques	29
3.1. Corps de fonctions	29
3.2. Formes devenant hyperboliques sur le corps des fonctions d'une quadrique	30
3.3. Le théorème d'Arason-Pfister	32
3.4. Exercices	34
4. La théorie de Knebusch	35
4.1. Hauteur	35
4.2. Formes de hauteur 1	36
4.3. Degré ; les idéaux J_n	37
4.4. Retour à la section 3.2	40
4.5. Exercices	41
5. Formes devenant isotropes sur le corps des fonctions d'une quadrique	43
5.1. Généralités	43
5.2. Le théorème de Hoffmann	44
5.3. Voisines	47

5.4. Formes excellentes	49
5.5. Formes de Pfister croisées	53
5.6. Extensions excellentes	57
5.7. Formes de hauteur 2	61
5.8. Exercices	65
6. Invariants élémentaires	67
6.1. Le discriminant	67
6.2. L'algèbre de Clifford	69
6.3. Le groupe de Brauer-Wall	71
6.4. Exercices	80
7. Le théorème de réduction d'indice et ses applications	81
7.1. Le théorème de réduction d'indice	81
7.2. Application I : déploiement générique	84
7.3. Application II : le u -invariant des corps	85
7.4. Exercices	89
8. Formes de basse dimension	91
8.1. Formes de basse dimension	91
8.2. Retour au chapitre 5 pour les formes de basse dimension	100
8.3. Exercices	108
9. Invariants supérieurs	109
9.1. Invariants élémentaires et cohomologie galoisienne	109
9.2. K -théorie de Milnor	109
9.3. Le triangle incomplet de Milnor	110
9.4. Invariants cohomologiques supérieurs	113
9.5. Le noyau de $H^n F \rightarrow H^n F(q)$	116
9.6. Le théorème d'Arason	118
9.7. Bijectivité de a^n , b^n et e^n	121
9.8. Application à l'isotropie des formes quadratiques	123
9.9. Exercices	125
10. Descente	127
10.1. L'anneau de Witt non ramifié et la cohomologie non ramifiée	127
10.2. Théorèmes de surjectivité	129
10.3. Deux problèmes de descente	132
10.4. Une première conjecture de descente	132
10.5. Application à la hauteur et au degré	134
10.6. Une deuxième conjecture de descente	134
10.7. Exercices	136
A. Rappels sur le groupe de Brauer	139

A.1. Algèbres simples et semi-simples	139
A.2. Le groupe de Brauer	140
A.3. Exemples	143
A.4. Exercice	147
B. Rappels de cohomologie galoisienne	149
B.1. Cohomologie des groupes finis	149
B.2. Cohomologie des groupes profinis	152
B.3. Cohomologie galoisienne	153
B.4. Le théorème 90 de Hilbert	153
B.5. Groupe de Brauer et cohomologie galoisienne	154
B.6. Théorie de Kummer	156
B.7. La longue suite exacte d'une extension quadratique	158
B.8. Dimension cohomologique	159
C. Courbes algébriques	161
C.1. Valuations discrètes	161
C.2. Extensions rationnelles	167
C.3. Compatibilités	169
C.4. Courbes algébriques	170
C.5. Le théorème de Riemann-Roch	174
C.6. Réciprocité de Weil	175
D. Un aperçu sur les formes quadratiques en caractéristique 2	177
D.1. Introduction	177
D.2. Premières définitions	179
D.3. Normalisation d'une forme quadratique	181
D.4. Diagonalisation d'une forme bilinéaire	184
D.5. Invariant d'Arf et algèbre de Clifford	184
D.6. Simplification de Witt - Décomposition de Witt	185
D.7. Anneau de Witt – Groupe de Witt	188
D.8. Relation de sous-forme entre les formes quadratiques	189
D.9. Formes bilinéaires - Formes totalement singulières	191
D.10. Corps de fonctions - Théorèmes de sous-forme	194
D.11. Les formes de Pfister et leurs voisines	195
D.12. Isotropie sur les corps de fonctions des quadriques	200
D.13. Déploiement standard des formes quadratiques	205
D.14. Un théorème de Fitzgerald et un autre de Knebusch	209
D.15. Le théorème de norme	212
D.16. Formes différentielles et corps de fonctions	214
D.17. Un invariant pour les formes totalement singulières	218
D.18. Quelques calculs de noyaux de Witt	222
E. Formes quadratiques et cycles algébriques	227

Introduction	227
E.1. Définitions et notations	229
E.2. La théorie de Witt	230
E.3. Le théorème de Springer	232
E.4. La théorie de Pfister : puissances de I	232
E.5. Corps de fonctions de quadriques	234
E.6. La théorie de Knebusch : déploiement générique	235
E.7. Équivalence birationnelle stable	240
E.8. Quatre résultats fondamentaux	242
E.9. Trois applications	244
E.10. Formes quadratiques et motifs : résultats de base	247
E.11. Formes quadratiques et motifs : théories de Rost et de Vishik	258
E.12. Quelques démonstrations	272
F. Solution de certains exercices	275
Chapitre 1	275
Chapitre 2	275
Chapitre 3	276
Chapitre 4	276
Chapitre 5	278
Chapitre 8	280
Bibliographie	283
Glossaire	299
Index	301