

# AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

*Group Schemes*  
*A celebration of SGA3*

## Volume III

Michel Demazure, Bas Edixhoven, Philippe Gille

Wilberd van der Kallen, Ting-Yu Lee

Simon Pepin Lehalleur, Matthieu Romagny

Jilong Tong, Jiu-Kang Yu

*edited by*

Bas Edixhoven, Philippe Gille, Gopal Prasad, Patrick Polo



Panoramas et Synthèses

Numéro 47

---

### *Comité de rédaction*

Serge CANTAT  
Anne-Laure DALIBARD  
Tien-Cuong DINH  
Arnaud GUILLIN

Marc HINDRY  
Pascal MASSART  
Ariane MÉZARD  
Hervé PAJOT

Nicolas BERGERON (dir.)

### *Diffusion*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

EDP Sciences  
17, avenue du Hoggar  
91944 Les Ulis Cedex A  
France  
www.edpsciences.com

### *Tarifs*

*Vente au numéro* : 56 € (\$ 84)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### *Secrétariat : Nathalie Christiaën*

*Panoramas et Synthèses*

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-820-6

Directeur de la publication : Marc Peigné

---

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 47

## AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

*Group Schemes*  
*A celebration of SGA3*

Volume III

Michel Demazure, Bas Edixhoven, Philippe Gille,  
Wilberd van der Kallen, Ting-Yu Lee,  
Simon Pepin Lehalleur, Matthieu Romagny,  
Jilong Tong, Jiu-Kang Yu

edited by

Bas Edixhoven, Philippe Gille, Gopal Prasad, Patrick Polo

Société mathématique de France 2015

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

*Michel Demazure*

127, rue Anatole France, 37540 Saint-Cyr sur Loire, France

*E-mail* : [michel@demazure.com](mailto:michel@demazure.com)

*Bas Edixhoven*

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden, Nederland

*E-mail* : [edix@math.leidenuniv.nl](mailto:edix@math.leidenuniv.nl)

*Philippe Gille*

UMR 5208 du CNRS - Institut Camille Jordan - Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex - France.

Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Calea Grivitei 21, RO-010702 Bucarest, Roumanie.

*Wilberd van der Kallen*

Mathematisch Instituut Universiteit Utrecht, P.O. Box 80.010, NL-3508 TA Utrecht, The Netherlands

*E-mail* : [W.vanderKallen@uu.nl](mailto:W.vanderKallen@uu.nl)

*Ting-Yu Lee*

DMA-Ecole normal supérieure, 45 Rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France

*E-mail* : [ting-yu.lee@epfl.ch](mailto:ting-yu.lee@epfl.ch)

*Simon Pepin Lehalleur*

Institut für Mathematik

Universität Zürich

*E-mail* : [simon.pepin@math.uzh.ch](mailto:simon.pepin@math.uzh.ch)

*Matthieu Romagny*

Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

*E-mail* : [matthieu.romagny@univ-rennes1.fr](mailto:matthieu.romagny@univ-rennes1.fr)

*Jilong Tong*

Université de Bordeaux 1, Institut de Mathématiques de Bordeaux, 33405 Talence France

*E-mail* : [jilong.tong@math.u-bordeaux1.fr](mailto:jilong.tong@math.u-bordeaux1.fr)

*Jiu-Kang Yu*

The Institute of Mathematical Sciences, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., Hong Kong

*E-mail* : [jkyu@ims.cuhk.edu.hk](mailto:jkyu@ims.cuhk.edu.hk)

---

**2000 Mathematics Subject Classification.** — 11G05, 11G10, 13A50, 14K99, 14L15, 14L24, 14L30, 20G05, 20G35.

**Mots-clé et phrases.** — Constantes de structure, cross-section de Steinberg, données radicielles, isotropie, loi de groupe birationnelle, modèle de Néron, modèles, quotient adjoint, réductibilité, règle des signes, représentations fondamentales, schémas en groupes réductifs, schéma  $p$ -polynomial, schéma en groupes de Chevalley, schéma en groupes unipotent, schémas en groupes, sous-groupes paraboliques, systèmes de racines.

---

# AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

*Group Schemes  
A celebration of SGA3*

Volume III

M. Demazure, B. Edixhoven, P. Gille, W. van der Kallen, T.-Y. Lee,  
S. Pepin Lehalleur, M. Romagny, J. Tong, J.-K. Yu

**Abstract.** — This volume contains the third part of the proceedings of the *Summer school “Group Schemes, introduction to the SGA3 seminar of Demazure-Grothendieck”*, which was held at the Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) at Luminy in September 2011. This summer school was devoted to the theory of group schemes and especially of reductive group schemes.

As the second one, this third part mainly consists of expanded versions of talks given, some of which contain new results on group schemes.

**Résumé.** — Ce volume contient la troisième partie des actes de l'École d'été « Schémas en groupes, une introduction au séminaire SGA3 de Demazure-Grothendieck », qui s'est tenue au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) à Luminy en septembre 2011. Cette école était consacrée à la théorie des schémas en groupes en particulier réductifs.

De même que le volume II, ce troisième volume est constitué principalement de versions développées d'exposés oraux, dont certains présentent des résultats originaux sur les schémas en groupes.



du 29 août au 9 septembre 2011  
au CIRM (Luminy)

# ÉCOLE d'ÉTÉ : SCHÉMAS en GROUPES

Une INTRODUCTION au SÉMINAIRE SGA 3  
de DEMAZURE-GROTHENDIECK

S. Brochard,  
B. Conrad,  
L. Fargues,  
B. Gross,  
A. Mézard,  
A. Mokrane,  
B.-C. Ngô,  
J. Oesterlé,  
M. Romagny,  
J.-K. Yu.



ANR

CIRM

CNRS

IHES

Société  
Mathématique  
de France  
SMF

Réalisation graphique : Julien Fournigault.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| MICHEL DEMAZURE — <i>La règle des signes de Tits</i> .....                                                   | 1   |
| 1. Introduction .....                                                                                        | 1   |
| 2. Groupes de rang un .....                                                                                  | 2   |
| 3. Groupes de rang 2 : calcul de crochets .....                                                              | 5   |
| 4. Le groupe de Weyl étendu .....                                                                            | 9   |
| Références .....                                                                                             | 13  |
| BAS EDIXHOVEN & MATTHIEU ROMAGNY — <i>Group schemes out of birational<br/>group laws, Néron models</i> ..... | 15  |
| 1. Introduction .....                                                                                        | 15  |
| 2. A case treated by André Weil .....                                                                        | 17  |
| 3. The case treated by Michael Artin in SGA3 .....                                                           | 21  |
| 4. Application to Néron models .....                                                                         | 30  |
| 5. Néron's smoothening process .....                                                                         | 31  |
| 6. From weak Néron models to Néron models .....                                                              | 33  |
| References .....                                                                                             | 37  |
| PHILIPPE GILLE — <i>Sur la classification des schémas en groupes semi-simples</i> .....                      | 39  |
| 1. Introduction .....                                                                                        | 39  |
| 2. Préliminaires .....                                                                                       | 42  |
| 3. Sous-groupes paraboliques .....                                                                           | 57  |
| 4. La décomposition de Witt-Tits .....                                                                       | 73  |
| 5. Le cas du schéma en groupes des automorphismes d'un schéma de Chevalley .....                             | 79  |
| 6. Sous-schémas paraboliques des données radicielles tordues .....                                           | 83  |
| 7. Isotropie et irréductibilité .....                                                                        | 90  |
| 8. Invariants cohomologiques des groupes semi-simples .....                                                  | 95  |
| 9. Appendice : cohomologie des groupes à valeurs dans des groupes de Weyl .....                              | 99  |
| Références .....                                                                                             | 108 |
| WILBERD VAN DER KALLEN — <i>Good Grosshans filtration in a family</i> .....                                  | 111 |
| 1. Introduction .....                                                                                        | 111 |
| 2. Recollections and conventions .....                                                                       | 113 |

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3. Gradings .....                                                                                           | 115 |
| 4. Picard graded Cox rings .....                                                                            | 116 |
| 5. Coherent sheaves .....                                                                                   | 117 |
| 6. Resolution of the diagonal .....                                                                         | 119 |
| 7. Differently graded Cox rings .....                                                                       | 122 |
| 8. Variations on the Grosshans grading .....                                                                | 122 |
| 9. Proof of the main result .....                                                                           | 124 |
| 10. Consequences for earlier work .....                                                                     | 126 |
| Reductive group schemes over a Noetherian base ring. ....                                                   | 127 |
| References .....                                                                                            | 128 |
| TING-YU LEE — <i>Adjoint quotients of reductive groups</i> .....                                            | 131 |
| 1. Introduction .....                                                                                       | 131 |
| 2. Notations and Definitions .....                                                                          | 132 |
| 3. The adjoint quotient over $\mathbb{Z}$ .....                                                             | 133 |
| 4. Stability under base change .....                                                                        | 137 |
| 5. Generalized Steinberg's cross-section .....                                                              | 139 |
| References .....                                                                                            | 144 |
| SIMON PEPIN LEHALLEUR — <i>Subgroups of maximal rank of reductive groups</i> .                              | 147 |
| Introduction .....                                                                                          | 147 |
| 1. Lie algebras of subgroups of maximal rank .....                                                          | 150 |
| 2. Root systems and $p$ -closed subsets .....                                                               | 151 |
| 3. Construction of subgroups of maximal rank from Lie algebras .....                                        | 156 |
| 4. Reduction to semi-simple absolutely simple simply connected groups ....                                  | 160 |
| 5. Very special isogenies in characteristics 2 and 3 and exceptional $p$ -closed<br>sets .....              | 161 |
| 6. The Borel-De Siebenthal algorithm in positive characteristic .....                                       | 164 |
| A. Extended Dynkin diagrams .....                                                                           | 170 |
| References .....                                                                                            | 171 |
| JILONG TONG — <i>Unipotent groups over a discrete valuation ring (after<br/>Dolgachev-Weisfeiler)</i> ..... | 173 |
| Introduction .....                                                                                          | 173 |
| 1. Notations and reviews .....                                                                              | 174 |
| 2. Generators of the $R$ -algebra $R[G]$ .....                                                              | 181 |
| 3. Geometry of unipotent groups .....                                                                       | 205 |
| 4. Some explicit models of two dimensional unipotent groups .....                                           | 216 |
| References .....                                                                                            | 224 |
| JIU-KANG YU — <i>Smooth models associated to concave functions in Bruhat-Tits<br/>theory</i> .....          | 227 |
| 0. Introduction .....                                                                                       | 227 |

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Notations .....                                             | 230 |
| 2. Modifying integral models .....                             | 232 |
| 3. Smooth models for parahoric subgroups .....                 | 235 |
| 4. Admissible filtrations on tori .....                        | 238 |
| 5. The minimal congruent filtrations of tori .....             | 242 |
| 6. Good filtrations of tori .....                              | 244 |
| 7. Lemmas .....                                                | 245 |
| 8. Smooth models associated to concave functions .....         | 249 |
| 9. Comments and additional results .....                       | 252 |
| 10. The compact groups in the construction of tame types ..... | 254 |
| References .....                                               | 257 |



## RÉSUMÉS DES ARTICLES

### *La règle des signes de Tits*

MICHEL DEMAZURE ..... 1

Cette note explicite la remarque 6.7 de l'exposé XXIII de SGA3 ([SGA3, 1970], p. 322 et [SGA3, 2011], p. 219), sous la forme d'une relecture des exposés XX et XXIII, à la lumière de l'article de Tits [1966] cité dans cette remarque.

### *Schémas de groupes obtenus à partir de lois de groupe birationnelles, modèles de Néron*

BAS EDIXHOVEN & MATTHIEU ROMAGNY ..... 15

Dans cette note, nous présentons le théorème d'extension d'une loi de groupe birationnelle en un groupe algébrique, dans le cadre des variétés algébriques classiques (Weil) et des schémas (Artin). Nous améliorons légèrement le résultat original et sa preuve en donnant une construction plus directe du groupe, en apportant des compléments sur ses propriétés de séparation, et en utilisant systématiquement les espaces algébriques. Nous expliquons aussi l'application importante à la construction des modèles de Néron des variétés abéliennes. Cette note est issue des cours donnés par Ariane Mézard et le second auteur à l'École d'été « Schémas en groupes » qui s'est tenue au CIRM (Luminy) du 29 août au 9 septembre 2011.

### *Sur la classification des schémas en groupes semi-simples*

PHILIPPE GILLE ..... 39

Nous abordons la classification des schémas en groupes semi-simples du point de vue cohomologique et immobilier à la Bruhat-Tits afin de généraliser les techniques galoisiennes sur un corps à des anneaux plus généraux. Cela amène à étudier la notion de réductibilité pour les schémas en groupes réductifs en lien avec les sous-groupes à un paramètre. De plus, on travaille avec des schémas en groupes affines lisses  $G$  non nécessairement connexes mais à composante neutre réductive, ce qui nous conduit à étudier les normalisateurs de sous-groupes paraboliques de  $G^0$  et leurs espaces principaux homogènes. Enfin, l'exposé contient en appendice des analogies pour les schémas en groupes de Weyl et les données radicielles tordues.

*Faisceaux munis de filtration de Grothendieck*

WILBERD VAN DER KALLEN ..... 111

Nous généralisons le résultat principal de [V. Srinivas, W. van der Kallen, 2009], en remplaçant le corps de base par un anneau commutatif noethérien  $k$ . Ainsi on obtient de l'information sur la cohomologie  $H^*(G, A)$ , où  $G$  est un schéma en groupes réductif sur  $k$  et  $A$  est une  $k$ -algèbre de type fini. Nous suivons les grandes lignes du texte original [V. Srinivas, W. van der Kallen, 2009].

*Quotients adjoints de groupes réductifs*

TING-YU LEE ..... 131

Soit  $k$  un anneau commutatif et  $G$  un groupe réductif sur  $k$ . Dans cet article, on va définir le quotient adjoint  $G//G$  de  $G$  sur  $k$  et démontrer que la construction est stable par changement de base. En plus, si  $G$  possède un tore maximal  $T$ , le quotient adjoint de  $T$  par son groupe de Weyl est isomorphe à  $G//G$ . Dans la dernière section, on se concentre sur le cas  $G$  semi-simple simplement connexe de type constant. Dans ce cas,  $G//G$  est isomorphe à la restriction de Weil  $\prod_{D/\text{spec } k} \mathbb{A}_D^1$ , où  $D$  est le schéma de Dynkin. Si  $G$  est de plus quasi-déployable et sans composantes de type  $A_{2m}$ , on peut construire la cross-section de Steinberg sur  $k$ .

*Sous-groupes de groupes réductifs de rang maximal*

SIMON PEPIN LEHALLEUR ..... 147

Dans l'article [1949], Borel et De Siebenthal étudient la structure des sous-groupes de rang maximal des groupes de Lie compacts. Dans cette note, nous montrons comment les méthodes de [SGA3, 1970] permettent d'étendre leurs résultats aux schémas en groupes réductifs sur une base générale. Nous discutons en particulier les sous-groupes exceptionnels qui apparaissent en caractéristiques 2 et 3.

*Groupes unipotents sur un anneau de valuation discret (d'après Dolgachev-Weisfeiler)*

JILONG TONG ..... 173

Le but de ces notes est de comprendre le travail important [Dolgachev-Weisfeiler, 1974] de Dolgachev-Weisfeiler sur les schémas en groupes unipotents sur un anneau de valuation discrète. Parmi les résultats présentés dans ces notes, nous démontrons, suivant [Dolgachev-Weisfeiler, 1974], l'existence de bons générateurs de l'anneau affine d'un tel schéma en groupes.

*Modèles lisses associés aux fonctions concaves en théorie de Bruhat-Tits*

JIU-KANG YU ..... 227

La théorie de Bruhat-Tits donne lieu à une construction systématique de sous-groupes bornés au moyen de fonctions concaves  $f$ . Dans le cas où  $f(0) = 0$ , le groupe borné correspondant peut être enrichi d'une structure de schéma en groupes sur l'anneau d'entiers du corps local de base. Nous donnons une nouvelle construction de ces schémas en groupes en levant l'hypothèse  $f(0) = 0$ , de sorte que le résultat est applicable à une famille étendue de sous-groupes bornés utilisés en théorie des représentations, notamment les groupes de Moy-Prasad.



## ABSTRACTS

### *Tits' sign rule*

MICHEL DEMAZURE ..... 1

This note is an explication of remark 6.7 in *Exposé XXIII* of SGA3 ([SGA3, 1970] and [SGA3, 2011]). We will re-read *Exposés XX* and *XXIII* and recover Tits' commutation rule, as given in [Tits, 1966].

### *Group schemes out of birational group laws, Néron models*

BAS EDIXHOVEN & MATTHIEU ROMAGNY ..... 15

In this note, we present the theorem of extension of birational group laws in both settings of classical varieties (Weil) and schemes (Artin). We improve slightly the original proof and result with a more direct construction of the group extension, a discussion of its separation properties, and the systematic use of algebraic spaces. We also explain the important application to the construction of Néron models of abelian varieties. This note grew out of lectures given by Ariane Mézard and the second author at the Summer School "Schémas en groupes" held in the CIRM (Luminy) from 29 August to 9 September, 2011.

### *On the classification of semisimple group schemes*

PHILIPPE GILLE ..... 39

We deal with the classification of semisimple group schemes via the Bruhat-Tits' presentation of non-abelian cohomology. The goal is to generalize Galois techniques to more general rings. It leads us to investigate the concept of reducibility for reductive group schemes with special attention to one parameter subgroups. It requires also the study of parabolic subgroups and their normalizers of a not-necessarily connected affine smooth group scheme  $G$  whose neutral component  $G^0$  is reductive. The text discusses in an appendix also certain analogies for Weyl group schemes and twisted root data.