

Revue d'Histoire des Mathématiques



Évariste
Galois

E Galois

Tome 17 Fascicule 2

2 0 1 1

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :

Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Alain Bernard
Frédéric Brechenmacher
Maarten Bullynck
Sébastien Gandon
Hélène Gispert
Catherine Goldstein
Jens Høyrup
Agathe Keller
Marc Moyon
Karen Parshall
Jeanne Peiffer
Tatiana Roque
Sophie Roux
Dominique Tournès

Directeur de la publication :

Marc Peigné

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall
June Barrow-Greene
Umberto Bottazzini
Jean Pierre Bourguignon
Aldo Brigaglia
Bernard Bru
Jean-Luc Chabert
François Charette
Karine Chemla
Pierre Crépel
François De Gandt
Moritz Epple
Natalia Ermolaëva
Christian Gilain
Jeremy Gray
Tinne Hoff Kjeldsen
Jesper Lützen
Antoni Malet
Irène Passeron
Christine Proust
David Rowe
Ken Saito
S. R. Sarma
Erhard Scholz
Reinhard Siegmund-Schultze
Stephen Stigler
Bernard Vitrac

Secrétariat :

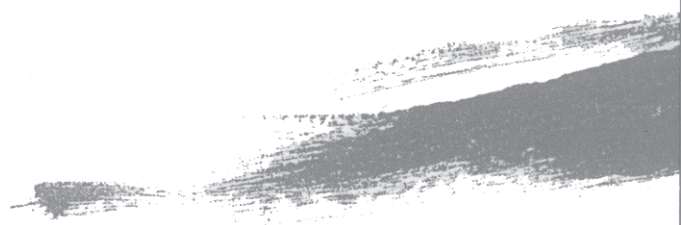
Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 80 €; prix public hors Europe : 89 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF
Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Revue d'Histoire des Mathématiques



Journal for
the History of
Mathematics

Tome 17 Fascicule 2

2 0 1 1

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

EDITORIAL

Time travel is a historian's nightmare. In a recent Canadian comic book¹, Évariste Galois is sucked out of his cell shortly before his fatal duel and invited to join a team consisting of Brahmagupta, Hypatia, al-Khwarizmi, Maria Agnesi, Georg Cantor, and Alan Turing. These "Wandering Stars" then zap all over the four (or more) dimensions, "anywhere, anywhen, anyway" driving a big fast dodecahedron to "solve problems on a different scale"—universal problems, in the sense of problems of the universe. In one of the episodes, Galois's rebellious nature and unbridled curiosity create one such problem themselves; in another, Hypatia asks him to use his "deep knowledge of group theory" to effectively coordinate their parallel actions against a forest of philosophizing trees on a rampage in the eighteenth century. But the sort of mathematics employed by the team (fractals in particular), and the very recruitment of Galois leave Gauss and Kronecker deeply unhappy and the latter demands a punitive expedition against the "Stars"...

A comic book is easily dismissed, but the constant recurring of Galois's name²—in spite of the very few pages he left behind—and the well-cultivated memory of his short and tragic life are evidence that what the name "Galois" covers today is the result of a dense and complicated process of knowledge building over the past two centuries. What is routinely taught today as "Galois theory" is only some 100 years old and Galois is principally "remembered" for relatively recent developments in algebra. More than any other mathematician he thus shares the posthumous, commemorative fate of many an intellectual or national hero, whose historic persona has become indistinguishable from the cultural emblem into which he has been transformed.

¹ James Davidge (text) & Jesse Davidge (illustrations). *Mathemagick & Mystiphsics, Featuring the Wandering Stars*, vol I: *The Probabilities of Pandemonium*. Calgary, Canada, Bayeux Arts Inc. 2010. I am grateful to Andrea Albrecht who gave me a copy of this comic.

² "E. Galois (1811–1832) would certainly be surprised to see how often his name is mentioned in the mathematical books and articles of the twentieth century, in topics which are so far removed from his original work." This is the opening sentence of the book *Galois Theories* by Francis Borceux and George Janelidze, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 72, Cambridge University Press 2001.

In a thirty page novelette with the ironically misspelled title *Goethe schtirbt*,³ the late Austrian writer Thomas Bernhard has offered an ingenious account of the sort of time travel which past heroes undergo in the thoughts of others. On the face of it, the story is about the last days and months of Goethe's life. But events are not told directly; what is recounted are only things said or heard by others. The whole text is written in indirect speech, often even in an indirect report of indirect speech. From these nested recollections we gather that Goethe had expressed a strong desire to receive in his Weimar home on the 22nd of March⁴, none other than Ludwig Wittgenstein, "from Cambridge or Oxford", whom Goethe is said to have held "worthy of the highest esteem" and to have called his "philosophical son", in order to discuss with him *doubting and non-doubting*.⁵ Is not Thomas Bernhard's cross-fade of Goethe with his Austrian hero Wittgenstein similar to teaching Galois theory along the lines set up by Emil Artin?

The present special issue of *Revue d'histoire des mathématiques*, issued on the occasion of the bicentennial of the birth of Évariste Galois, on 25 October 2011, offers the reader original research articles in the history of mathematics centred on the works of Évariste Galois and their posterity—or rather posterities—mainly concentrating on the nineteenth century.

Caroline Ehrhardt's recent Ph.D. thesis⁶ discusses afresh, in a thorough and illuminating way, Évariste Galois himself, his training, his relations with contemporary mathematical milieu, and his iconic role in the collective mathematical memory. One can consult her article "Évariste Galois, un candidat à l'école préparatoire en 1829," *Revue d'histoire des mathématiques*, 14, 2 (2008), p. 289–328, as well as her book, *Évariste Galois, la fabrication d'une icône mathématique*, Paris: EHESS, 2011. In her thesis, Ehrhardt also analyzes the problems raised by the usual history of Galois's posterity, mainly focussed on his *Mémoire sur les conditions de résolubilité des*

³ Something like *Goethe dddies*, posthumously published as the first story in a small collection: Thomas Bernhard, *Goethe schtirbt—Erzählungen*, Berlin (Suhrkamp) 2010.

⁴ Goethe's birthday and day of death were marked in the calendar of traditional German education. Incidentally, Goethe died 70 days before Galois did.

⁵ *Das Zweifelnde und das Nichtzweifelnde*. This could be an allusion to Wittgenstein's *Tractatus*, say § 6.51. But a more likely guess, if a reference to Wittgenstein is indeed intended, would seem to be *Über Gewissheit / On Certainty*, from Wittgenstein's last year.

⁶ Caroline Ehrhardt, *Évariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811–1910)*. Thèse de doctorat, EHESS 2007.

équations par radicaux, and associated with the elaboration of group theory and Galois theory.⁷

The present special issue opens with a new survey of her results; after a tour of the traditional story of Galois's (after)life, emphasizing the various questions of historical method and textual interpretation raised at each stage by such a construction, Ehrhardt proposes a new history of Galois's *Mémoire* and its role in the establishment of group theory.

The three contributions which follow address important, hitherto little-known, developments of Galois's work during the nineteenth century; they also discuss other texts of Galois, outside of and beyond the *Mémoire*.

Catherine Goldstein explores the points of contact between Évariste Galois and Charles Hermite: continued fractions, modular equations (and the general quintic), and monodromy groups. A central theme of Hermite's research was the unity of algebra, analysis, and number theory. In his work on equations, he aimed at a classification of algebraic numbers and functions, based upon a vast synthesis of invariant theory and elliptic functions; a programme the memory of which has largely vanished from our current outlook on Galois's legacy. Nevertheless, Hermite had been an early and well-informed reader of Galois and had participated in essential ways to the diffusion of the latter's results in the mid-nineteenth century. Closely following references to Galois in Hermite's work, the paper reconstitutes how Hermite integrated Galois results into his research field and why this part of Galois's heritage has been generally forgotten, in mathematics as well as in history of mathematics.

Frédéric Brechenmacher's *Self-portraits with Évariste Galois* places Camille Jordan's famous *Traité des substitutions* of 1870 at the centre and shows that it established two essentially distinct links with Galois. On the one hand, in Jordan's presentation of Galois's general principles, Hermite's approach connected to Clebsch's geometrical work in a synthesis around the classification of algebraic irrationals. On the other hand, Jordan attached a particular importance to a method of reduction ultimately based on the analytic representation of substitutions via Galois's *number theory imaginaries*, i.e., finite fields. The article looks back at Jordan's retrospective insight into Galois's work and forward to the reception of Jordan and of his vision of Galois through the study of several networks of mathematical texts dating to the end of the nineteenth century. These collective

⁷ See also Caroline Ehrhardt, *D'un mémoire mathématique à une théorie: réélaborations des écrits de Galois au XIX^e siècle*, Paris: CTHS (to appear).

receptions reveal various networks, among them one around Leonard Dickson and another centring on Felix Klein's book on the icosahedron.

Since these first three papers all mention Louis Poincaré's ideas of a theory of order, let us recall that in the previous issue of our *Revue*, shipped in July 2011, we published Jenny Boucard's important study of Poincaré, which includes a hitherto unpublished manuscript on substitutions.⁸

In the penultimate contribution to this issue, Tom Archibald reflects on the genesis of differential Galois theory in France at the end of the nineteenth century, in the hands of Picard, Vessiot, and Drach. The use in these works of the concept of rationality domain testifies to the influence of the Kronecker theory of algebraic equations, although Kronecker claimed the inheritance of Abel more than Galois. It should be emphasized that in this period numerous works were exploring analogies between differential and algebraic equations. Thus to claim Galois's legacy in this framework was far from obvious (and is not to be found in particular in Frobenius, nor in Jordan, Poincaré or Appell). What strikes one here is the peculiar, ad hoc analogies mobilized by Picard, Vessiot and Drach in order to appeal to a notion of Galois's legacy—all within a general analytic framework.

Our special issue closes with a paper by two literary scholars, Andrea Albrecht et Anne-Gaëlle Weber. This presents a transnational kaleidoscope of literary traces of Galois. The works studied span more than 150 years and include French, German, and English texts. If criticism of popular biographies of Galois and their mythical elements has already been expressed in the past, the authors are interested here not so much in the authenticity of the interpretation or of the facts as in the very nature of the fictionalization of Galois. They underline the double literary appropriation of Évariste Galois, both as mathematician and as political activist, and explore the construction of the links between them. They also show how the literature devoted to Galois reflects representations about mathematics and its history and reopens the file of biography as a genre.

Norbert Schappacher

⁸ Jenny Boucard, Louis Poincaré et la théorie de l'ordre: un chaînon manquant entre Gauss et Galois? *Revue d'histoire des mathématiques* 17 (2011), 41–138.

ÉDITORIAL

Les voyages dans le temps sont les cauchemars des historiens. Dans une bande dessinée canadienne récente⁹, Évariste Galois est aspiré hors de sa cellule peu avant son duel fatal car il est invité à se joindre à Brahmagupta, Hypatie, al-Khwarizmi, Maria Agnesi, Georg Cantor, et Alan Turing. Cette équipe des « Wandering Stars » va alors zapper dans tous les sens dans les quatre (voire plus) dimensions, « anywhere, anywhen, anywhat », installée dans un grand dodécaèdre, pour « résoudre des problèmes à une échelle différente » ; des problèmes universels, dans le sens de problèmes de l'univers. Dans un des épisodes, Galois avec son caractère rebelle et sa curiosité effrénée crée lui-même un tel problème ; dans un autre, Hypatie lui demande d'appliquer son « savoir profond de la théorie des groupes » pour coordonner de manière efficace des actions parallèles menées par l'équipe contre une forêt d'arbres-philosophes qui se livrent au saccage dans le XVIII^e siècle. Mais le type de mathématiques appliquées par l'équipe (notamment les fractales) et le recrutement même de Galois suscitent le mécontentement de Gauss et de Kronecker ; ce dernier sollicite une expédition punitive contre les « stars »...

Il est facile d'ignorer une bande dessinée, mais la présence constamment renouvelée du nom de Galois¹⁰ — malgré le peu de feuilles qu'il a laissées lors de sa mort — et le souvenir fort bien cultivé de sa courte vie tragique montrent que tout ce que l'épithète « Galois », ou « galoisien », peut signifier aujourd'hui est le résultat d'un processus dense et compliqué de constitution de savoirs des deux siècles passés. Ce qu'on enseigne aujourd'hui de manière routinière comme « théorie de Galois » n'a que 100 ans environ ; Galois est principalement associé à des développements assez récents de l'algèbre. Plus que d'autres mathématiciens, Galois partage ainsi le sort posthume et commémoratif des héros intellectuels ou nationaux, dont le personnage historique est devenu inséparable de leur identité culturelle emblématique créée après leur mort.

⁹ James Davidge et Jesse Davidge, *Mathemagick & Mystiphysics, featuring the wandering stars*, vol I : *The probabilities of pandemonium*. Calgary, Canada, Bayeux Arts Inc. 2010. Je remercie Andrea Albrecht qui m'a donné un exemplaire de cette BD.

¹⁰ « E. Galois (1811–1832) would certainly be surprised to see how often his name is mentioned in the mathematical books and articles of the twentieth century, in topics which are so far removed from his original work. » C'est la phrase d'ouverture du livre *Galois Theories* de Francis Borceux et George Janelidze, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 72, Cambridge University Press 2001.

Dans une nouvelle d'une trentaine de pages, sous le titre ironiquement mal épilé *Goethe schtirbt*¹¹, l'auteur autrichien Thomas Bernhard nous offre un compte rendu très fin de cette sorte de voyage dans le temps qu'entreprennent les héros dans les pensées des générations suivantes. À première vue, il raconte les derniers mois et jours de la vie de Goethe. Mais les événements ne sont jamais décrits directement ; ne sont racontées que des choses dites ou entendues par d'autres. Tout le texte est écrit en discours indirect, souvent même au troisième niveau, comme compte rendu d'un discours indirect. À travers ces souvenirs on apprend que Goethe aurait exprimé le souhait résolu de recevoir dans sa maison à Weimar, le 22 mars¹², Ludwig Wittgenstein, « de Cambridge ou Oxford », que Goethe aurait considéré comme « le plus digne de respect » et appelé son « fils philosophique », afin de pouvoir discuter avec lui *du doutant et du non doutant*.¹³ Ce fondu enchaîné de Goethe avec le héros autrichien Wittgenstein, n'est-il pas similaire à l'enseignement de la théorie de Galois d'après Emil Artin ?

Ce numéro spécial de la *Revue d'histoire des mathématiques*, à l'occasion du bicentenaire de la naissance d'Évariste Galois du 25 octobre 2011, présente au lecteur des recherches originales d'histoire des mathématiques autour de l'œuvre d'Évariste Galois et de sa postérité, ou plutôt de ses postérités, principalement au XIX^e siècle.

La thèse récente de Caroline Ehrhardt¹⁴ revenait de manière approfondie et éclairante sur Évariste Galois lui-même, sa formation, ses relations avec le milieu mathématique contemporain, son rôle iconique dans la mémoire des mathématiques. On pourra consulter à ce propos son article « Évariste Galois, un candidat à l'école préparatoire en 1829 », *Revue d'histoire des mathématiques*, 14, 2 (2008), p. 289–328, et son livre, *Évariste Galois, la fabrication d'une icône mathématique*, Paris : EHESS, 2011. Ensuite Ehrhardt analysait dans sa thèse les problèmes posés par l'histoire usuelle de la

¹¹ Quelque chose comme : « Goethe mmmeurt ». Nouvelle publiée dans le petit recueil auquel elle donne son nom : Thomas Bernhard, *Goethe schtirbt — Erzählungen*, Berlin (Suhrkamp) 2010.

¹² L'anniversaire et la date de la mort de Goethe étaient des dates notoires du calendrier éducatif traditionnel allemand. Goethe est mort 70 jours avant Galois.

¹³ *Das Zweifelnde und das Nichtzweifelnde*. Ceci pourrait être une allusion au *Tractatus* de Wittgenstein, par exemple 6.51. Mais si une référence à Wittgenstein est entendue, il faudrait sans doute plutôt penser à : *Über Gewissheit / On certainty*, de la dernière année avant la mort de Wittgenstein.

¹⁴ Caroline Ehrhardt, *Évariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811–1910)*. Thèse de doctorat, EHESS 2007.

postérité de Galois, focalisée surtout sur le *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*, et associée principalement à l'élaboration de la théorie des groupes et de la théorie de Galois.¹⁵

Ce numéro spécial ouvre par une présentation inédite de ce travail : après un tour du récit traditionnel de la postérité de Galois, en insistant à chaque étape sur les problèmes de méthode historique et d'interprétation des textes que la construction de cette étape soulève, Ehrhardt propose une nouvelle histoire du *Mémoire* de Galois et étudie la constitution historique du savoir mathématique autour de la théorie des groupes.

Les trois contributions qui suivent sont consacrées à des développements importants, jusqu'alors mal connus, des travaux de Galois au XIX^e siècle ; elles mettent aussi l'accent sur d'autres textes de Galois, à côté du *Mémoire*.

Ainsi Catherine Goldstein explore les points de contact entre Évariste Galois et Charles Hermite : fractions continues, équations modulaires (et l'équation générale du cinquième degré), et groupes de monodromie. Un thème central des recherches d'Hermite était l'unité de l'algèbre, de l'analyse et de l'arithmétique. Dans son étude des équations, il visait une classification des nombres et des fonctions algébriques, fondée sur une synthèse de la théorie des invariants et des fonctions elliptiques — synthèse qui a essentiellement disparu de notre mémoire de l'héritage de Galois. Pourtant, Hermite a été un lecteur précoce et bien informé de Galois et a participé de manière essentielle à la diffusion de ses résultats au milieu du XIX^e siècle. Suivant en détail les occurrences de Galois dans l'œuvre d'Hermite, l'article reconstitue la manière dont ce dernier a intégré les travaux galoisiens à son champ de recherches et les raisons, tant historiques qu'historiographiques, de son oubli.

Frédéric Brechenmacher revient sur le célèbre *Traité des substitutions* de Camille Jordan et montre que ce dernier établissait deux relations essentiellement distinctes à Galois. D'un côté, la présentation des principes généraux de Galois articulait l'approche d'Hermite aux travaux géométriques de Clebsch en une synthèse sur le thème de la classification des irrationnelles. D'un autre côté, Jordan attribuait un caractère essentiel à une « méthode de réduction » sous-tendue par des représentations analytiques des substitutions linéaires par les *imaginaires de la théorie des nombres* de Galois — autrement dit les corps finis. En amont, l'article

¹⁵ Voir aussi Caroline Ehrhardt, *D'un mémoire mathématique à une théorie : réélaborations des écrits de Galois au XIX^e siècle*, Paris : CTHS, à paraître.

suit le regard rétrospectif porté par Jordan sur les travaux de Galois. En aval, il se penche sur la réception de Jordan et de sa vision de Galois à travers différents réseaux de textes mathématiques de la fin du XIX^e siècle. Ces réceptions collectives vont d'un réseau autour de Leonard Dickson jusqu'au livre de Felix Klein sur l'icosaèdre.

Ces trois articles mentionnant les idées de Louis Poincaré et de sa théorie de l'ordre, rappelons que le dernier numéro de la *Revue*, distribué en juillet 2011, contient une importante analyse de Jenny Boucard, avec un manuscrit inédit de Poincaré sur les substitutions.¹⁶

Dans l'avant-dernier article de ce numéro, Tom Archibald étudie la genèse de la théorie de Galois différentielle en France à la fin du XIX^e siècle, dans les travaux de Picard, Vessiot, et Drach. L'utilisation faite par ces travaux de la notion de domaine de rationalité met en évidence l'influence de la théorie des équations algébriques de Kronecker, bien que ce dernier se soit davantage réclamé d'Abel que de Galois. Il faut aussi souligner qu'alors que de nombreux travaux exploraient diverses analogies entre équations différentielles et algébriques, la revendication de l'héritage de Galois dans ce cadre était loin d'être automatique et n'apparaissait en particulier pas plus dans les travaux de Frobenius que dans ceux de Jordan, Poincaré ou Appell. De fait, on est frappé par les analogies particulières et ad hoc que les auteurs mobilisent dans leur poursuite de l'héritage galoisien — tout cela dans un cadre sensiblement analytique.

Le numéro spécial se termine par un article écrit par deux spécialistes de la littérature, Andrea Albrecht et Anne-Gaëlle Weber. Il présente un kaléidoscope transnational de traces littéraires de Galois ; les œuvres recensées s'étalent sur plus de 150 ans et incluent des textes en langues française, allemande et anglaise. Si la critique des biographies populaires de Galois et de leurs éléments mythiques a déjà été faite, les auteurs s'intéressent ici moins à l'authenticité des interprétations ou des faits rapportés qu'à la nature même de la fictionnalisation de Galois. Elles soulignent en particulier la double appropriation littéraire d'Évariste Galois, à la fois en tant que militant politique, et en tant que mathématicien, et examinent la construction des liens entre ces deux aspects. Elles montrent comment la littérature consacrée à Galois réfléchit des représentations sur les mathématiques et leur histoire et rouvrent le dossier de la biographie comme genre littéraire.

Norbert Schappacher

¹⁶ Jenny Boucard, Louis Poincaré et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? *Revue d'histoire des mathématiques* 17 (2011), 41–138.