BULLETIN DE LA S. M. F.

PASCAL HUBERT

Complexité de suites définies par des billards rationnels

Bulletin de la S. M. F., tome 123, nº 2 (1995), p. 257-270
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_2_257_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 257–270.

COMPLEXITÉ DE SUITES DÉFINIES PAR DES BILLARDS RATIONNELS

PAR

PASCAL HUBERT (*)

RÉSUMÉ. — Soit P un polygone rationnel convexe, $k_1\pi/r, \dots, k_q\pi/r$ les angles entre deux côtés consécutifs où $k_1, \dots, k_q, r$ sont premiers dans leur ensemble. Nous considérons le problème de billard dans ce polygone et codons les trajectoires suivant les côtés qu'elles rencontrent. Nous montrons que, si la suite ainsi obtenue n'est pas périodique, sa complexité est donnée par la formule $p(n) = n(q-2)r + 2r$. Cette expression de la complexité est valable pour n assez grand et est indépendante des conditions initiales du problème.

ABSTRACT. — Let P be a convex rational polygon, $k_1\pi/r, \dots, k_q\pi/r$ the interior angles ($k_1, \dots, k_q, r$ are coprime). Let us consider the billiard problem in this polygon. We code the trajectories according to the sides they meet. When the sequence so obtained is not periodic, we show that the complexity of this sequence is equal to $p(n) = n(q-2)r + 2r$. This formula is true for n large enough and does not depend on the initial conditions.

0. Introduction

On connaît peu de résultats concernant les propriétés ergodiques ou celles liées au codage du flot du billard dans un polygone quelconque. Trouver un exemple de flot de billard dans un polygone qui soit ergodique reste actuellement un problème ouvert. Toutefois, KERCKHOFF, MASUR et SMILLIE ont montré qu'il y a un G_δ dense de polygones pour lesquels le flot est ergodique (*cf.* [KMS]). Par ailleurs, KATOK démontre que ce sont des systèmes d'entropie nulle (*cf.* [K]). Certains cas particuliers sont tout de même bien connus, tant au niveau ergodique que du point de vue du codage.

(*) Texte reçu le 10 novembre 1993, révisé le 17 février 1994.
Pascal HUBERT, Laboratoire de Mathématiques Discrètes, CNRS-UPR 9016 case 930, 163 avenue de Luminy, 13288 Marseille CEDEX 9, France.
Email : hubert@lmd.univ-mrs.fr.
Classification AMS : 58F03, 05A15.

Le problème de billard le plus simple est celui du billard carré. On peut coder une trajectoire d'un tel billard par une suite infinie m sur l'alphabet $\{0, 1\}$ selon les côtés qu'elle rencontre : les côtés verticaux sont codés par 0 et les côtés horizontaux par 1. On sait, depuis les travaux de HEDLUND et MORSE (*cf.* [HM]), que — lorsque la pente de la droite d'incidence est irrationnelle — la complexité du mot m vaut

$$p(n) = n + 1$$

pour tout nombre entier n et que c'est la complexité minimale d'une suite non ultimement périodique. Réciproquement, toute suite dont la complexité est égale à $n + 1$, pour tout nombre entier n, code une trajectoire de billard dans un billard carré. De telles suites sont appelées *suites sturmiennes.*

N. NISHIOKA, I. SHIOKAWA et J. TAMURA ont donné un algorithme de construction du mot m en fonction du point initial et de la direction incidente (*cf.* [NST]). G. RAUZY a établi de nombreuses généralisations des suites sturmiennes : il donne, par exemple, dans un travail élaboré avec P. ARNOUX (*cf.* [AR]), une interprétation combinatoire et géométrique de certaines suites dont la complexité vaut $p(n) = 2n + 1$ pour tout nombre entier n. P. ARNOUX, C. MAUDUIT, I. SHIOKAWA et J. TAMURA ont prouvé que la complexité des suites définies par des trajectoires de billard dans un cube est, pour tout n,

$$p(n) = n^2 + n + 1$$

si la direction initiale est totalement irrationnelle (*cf.* [AMST]).

Dans ce travail, nous donnons un autre exemple de généralisation du problème du billard carré. Nous considérons le cas où le polygone est rationnel convexe. L'hypothèse de rationalité signifie que les angles entre deux côtés consécutifs sont commensurables à π. Dans ce cas, le fibré unitaire tangent se décompose en surfaces invariantes sous l'action du flot du billard. Sauf pour un nombre dénombrable de directions initiales, le flot est minimal sur ces surfaces. Nous codons les trajectoires de billard de façon naturelle, c'est-à-dire par la suite des côtés qu'elles rencontrent. Notons $k_1\pi/r, \ldots, k_q\pi/r$ les angles entre deux côtés consécutifs où $k_1, \ldots, k_q, r$ sont premiers dans leur ensemble. Pour n assez grand, nous montrons que la complexité des suites obtenues est donnée par la formule suivante :

$$p(n) = n(q - 2)r + 2r.$$

Cette expression, valable sauf pour un nombre dénombrable d'angles d'incidence, est linéaire et indépendante des conditions initiales (point de départ de la trajectoire et angle d'incidence).

1. Définitions, notations et résultats utiles

A. Mots infinis sur un alphabet fini.

Soit $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_g\}$ un alphabet fini, soit $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{A}$; on dit que M est un *mot infini* sur $\mathcal{A}$ et on le note

$$M = M_0 \cdots M_n \cdots .$$

Soit $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ un mot de longueur n sur l'alphabet $\mathcal{A}$; on dit que w est un *facteur* de M s'il existe k tel que :

$$M_k \cdots M_{k+n-1} = w_0 \cdots w_{n-1}.$$

Le langage d'ordre n de M, noté $L_n(M)$, est l'ensemble des facteurs de longueur n de M. La *complexité* de M est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui, à un nombre entier n, associe le cardinal de $L_n(M)$. Soit w' un mot de longueur $n+1$; on dit que w' est un *successeur* de w s'il existe une lettre a telle que $w' = wa$. Le *décalage* est l'application T de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ qui, au mot infini $M = M_0 \cdots M_n \cdots$, fait correspondre le mot infini $M' = M'_0 \cdots M'_n \cdots$ tel que $M'_n = M_{n+1}$ pour tout nombre entier n.

B. Billard dans un polygone.

a) *Définition du flot du billard.* — (*cf.* [BKM].) Soit P un polygone convexe du plan $\mathbb{R}^2$. On note $C_1, \ldots, C_q$ ses côtés orientés par les vecteurs unitaires $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_q$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ les angles entre deux côtés consécutifs. On oriente les angles à partir d'une direction donnée, par exemple $\vec{u}_1$. Soient x un point de P et θ un angle.

Règle 1. — Si x est sur le bord de P et n'est pas un sommet du polygone, alors x appartient à un côté C_i qui fait un angle β_i avec $\vec{u}_1$. On identifie les couples $(x, \beta_i + \theta)$ et $(x, \beta_i - \theta)$ pour θ compris entre 0 et π.

Règle 2. — Si x est un sommet de P, on identifie les couples (x, θ) pour tout θ appartenant à $[0, 2\pi[$.

L'*espace des phases* Ω est l'ensemble des couples (x, θ) pour x dans P et θ dans $[0, 2\pi[$, compte tenu des règles 1 et 2. On définit le *flot* Φ_t du billard sur Ω de la façon suivante.

Soient (x_0, θ_0) appartenant à Ω et t un nombre réel positif ; le couple $\Phi_t(x_0, \theta_0) = (x_t, \theta_t)$ est obtenu en joignant x_0 à x_t par une ligne polygonale $\mathcal{L}$ de longueur t. Chaque segment maximal de $\mathcal{L}$ a ses deux extrémités sur le bord de P (sauf le premier qui débute en x_0 et le dernier qui finit en x_t). Sur le bord, la direction change en suivant les lois de la réflexion, ce qui est possible d'après la règle 1. Si une trajectoire rencontre un sommet, elle y reste. Pour t négatif, on a $\Phi_t(x_0,\theta_0) = (x_t,\theta_t)$ si et seulement si

$$\Phi_{-t}(x_t,\theta_t+\pi) = (x_0,\theta_0+\pi).$$

En termes plus géométriques, le flot Φ_t est le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent du polygone P en identifiant sur le bord, les vecteurs symétriques par rapport au bord.

b) *Polygone rationnel.* — On dit que P est un *polygone rationnel* si $\alpha_1/\pi,\dots,\alpha_q/\pi$ sont des nombres rationnels. Dans ce qui suit, on écrira toujours $\alpha_i = k_i\pi/r$ avec $k_1,\dots,k_q$ et r premiers dans leur ensemble. Pour i compris entre 1 et q, soit $\mathcal{D}_i$ la droite vectorielle de direction $\vec{u}_i$ et S_i la symétrie par rapport à la droite $\mathcal{D}_i$. Notons G_P le groupe engendré par les symétries $S_1,\dots,S_q$. On dit que G_p est le *groupe des symétries* du polygone P. Les éléments de G_P agissent sur des vecteurs unitaires ou — ce qui revient au même — sur des angles orientés. Le groupe G_P est un groupe fini de cardinal $2r$, isomorphe au groupe diédral d'un polygone régulier à r côtés (*cf.* [CFS]).

Remarque. — Réciproquement, si le groupe des symétries d'un polygone convexe P est fini, alors le polygone P est un polygone rationnel.

c) *Flot du billard dans un polygone rationnel.* — (*cf.* [ZK] ou [A].)

(i) Construction d'une surface invariante.

Fixons une direction φ. Dans un polygone rationnel, comme le groupe G_P est fini, toute trajectoire de billard de direction initiale φ, ne prend qu'un nombre fini de directions qui sont les $\gamma(\varphi)$, pour γ élément de G_p. D'après la structure de G_p, ce sont les directions $\varphi_k^{\pm} = \pm\varphi + 2k\pi/r$, pour k compris entre 0 et $(r-1)$. Si φ n'appartient pas à $\mathbb{Z}\pi/r$, les angles $\varphi_k^{\pm}$ sont tous différents; c'est ce que l'on supposera dans la suite. La surface $\mathcal{M}_\varphi$ formée des couples $(x,\gamma(\varphi))$, pour x élément de P et γ appartenant à G_p, est donc invariante sous l'action du flot du billard. La surface $\mathcal{M}_\varphi$ est isométrique au produit $P \times G_p$ quotienté par l'identification des points (x,γ) et $(x, S_i \circ \gamma)$ si x appartient au côté C_i.

(ii) Géométrie de la surface $\mathcal{M}_\varphi$.

Sous les hypothèses que nous avons faites, la surface $\mathcal{M}_\varphi$ est une surface compacte orientable sans bord. Elle est triangulée : elle possède $2r$ faces isométriques à P, qr arêtes, car elles sont identifiées deux à deux. On appelle S_i ses sommets.

(iii) Exemples.

Dans les cas du carré, du triangle équilatéral, du triangle rectangle