

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 113
Nouvelle série

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean FASEL

2 0 0 8

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE	Charles FAVRE
Emmanuel BREUILLARD	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhem SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 27 € (\$40)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € (\$435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2008

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X
ISBN 978-2-85629-265-5

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 113

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean Fasel

Société Mathématique de France 2008

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Fasel

D-Math, ETH Zentrum, 8092 Zürich, Switzerland.

E-mail : `jean.fasel@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2000). — 13C10, 13D15, 14C15, 14C17, 18F30.

Mots clefs. — groupes de Chow-Witt, classe d'Euler, fibrés vectoriels.

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean Fasel

Résumé. — Dans ce travail, nous étudions les *groupes de Chow-Witt*. Ces groupes ont été introduits par J. Barge et F. Morel dans le but de comprendre dans quelle situation un A -module projectif P de rang égal à la dimension de A est isomorphe à un module projectif plus simple $Q \oplus A$.

Dans un premier temps, nous montrons que ces groupes satisfont à peu de choses près les propriétés fonctorielles des groupes de Chow classiques. Nous définissons ensuite pour tout $\mathcal{O}_X$ -module localement libre E de rang (constant) n sur un schéma régulier X de dimension $m \geq n$ une classe d'Euler $\tilde{c}_n(E)$ qui est un raffinement de la classe de Chern maximale classique $c_n(E)$. Cette classe d'Euler satisfait elle aussi de bonnes propriétés fonctorielles. Nous obtenons en particulier que si P est un projectif de rang n sur un anneau régulier A de dimension supérieure ou égale à n tel que $P \simeq Q \oplus A$ alors $\tilde{c}_n(P) = 0$.

Nous calculons dans un second temps les groupes de Chow-Witt maximaux d'un anneau régulier de dimension 2 et d'une $\mathbb{R}$ -algèbre A régulière de dimension quelconque. Il découle immédiatement de ces calculs que si P est un A -module projectif de rang n égal à la dimension de l'anneau on a $\tilde{c}_n(P) = 0$ si et seulement si $P \simeq Q \oplus A$.

Finalement nous examinons les liens entre les groupes de Chow-Witt et les groupes des classes d'Euler introduits par S. Bhatwadekar et R. Sridharan.

Abstract (Chow-Witt groups). — In this work we study the *Chow-Witt groups*. These groups were defined by J. Barge et F. Morel in order to understand when a projective module P of top rank over a ring A has a free factor of rank one, *i.e.*, is isomorphic to $Q \oplus A$.

We show first that these groups satisfy the same functorial properties as the classical Chow groups. Then we define for each locally free $\mathcal{O}_X$ -module E of (constant) rank n over a regular scheme X an Euler class $\tilde{c}_n(E)$ which is a refinement of the usual top Chern class $c_n(E)$. The Euler classes satisfy also good functorial properties. In particular, we get $\tilde{c}_n(P) = 0$ if P is a projective module of rank n over a regular ring A of dimension n such that $P \simeq Q \oplus A$.

Next we compute the top Chow-Witt group of a regular ring A of dimension 2 and the top Chow-Witt group of a regular $\mathbb{R}$ -algebra A of finite dimension. For such A , we get that if P is a projective module of rank equal to the dimension of the ring then $\tilde{c}_n(P) = 0$ if and only if $P \simeq Q \oplus A$.

Finally, we examine the links between the Chow-Witt groups and the Euler class groups defined by S. Bhatwadekar and R. Sridharan.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
1.1. Avertissement	3
1.2. Conventions	4
1.3. Remerciements	4
2. Le complexe en K-théorie de Milnor	5
2.1. Résumé	5
2.2. Définitions	6
2.3. Fonctorialité du complexe en K -théorie de Milnor	10
3. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma régulier	15
3.1. Résumé	15
3.2. Le groupe de Witt des complexes de modules localement libres	15
3.3. Le groupe de Witt des modules de longueur finie	17
3.4. Le complexe de Gersten-Witt	20
3.5. Un calcul des différentielles du complexe	25
4. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma de Gorenstein	27
4.1. Résumé	27
4.2. Les groupes de Witt des modules cohérents	28
4.3. Le groupe de Witt cohérent d'un anneau de Gorenstein local	30
4.4. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma de Gorenstein	34
5. Le morphisme de transfert	41
5.1. Résumé	41
5.2. Transferts	41
5.3. Le morphisme de complexes	43
6. Le calcul du morphisme de transfert	49
6.1. Résumé	49
6.2. Le complexe tordu par le faisceau canonique	50
6.3. Le morphisme de transfert tordu par les faisceaux canoniques	52
6.4. Le calcul explicite du transfert	55

7. Un autre calcul des différentielles du complexe	65
7.1. Résumé	65
7.2. Le cas facile	65
7.3. Le cas général	69
8. Le morphisme de transfert pour les morphismes propres	71
8.1. Résumé	71
8.2. Définition	71
8.3. Le morphisme de complexes	72
9. Complexe de Gersten-Witt et idéaux fondamentaux	83
9.1. Résumé	83
9.2. Différentielles et idéaux fondamentaux	84
9.3. Fonctorialité	86
10. Groupes de Chow-Witt d'un schéma	89
10.1. Résumé	89
10.2. La définition des groupes de Chow-Witt	90
10.3. Le groupe de Chow-Witt maximal d'une k -algèbre	97
10.4. Propriétés fonctorielles	101
11. Invariances homotopiques	107
11.1. Résumé	107
11.2. Invariance homotopique de $C(X, W)$	107
11.3. Invariance homotopique des groupes de Chow-Witt	113
12. Produits fibrés et morphismes de complexes	115
12.1. Résumé	115
12.2. Le cas des morphismes finis	115
12.3. Le cas général	119
13. Les classes d'Euler	125
13.1. Résumé	125
13.2. Définitions	126
13.3. Propriétés	128
13.4. Le calcul de $(s_0)_*$	130
14. La classe d'Euler d'un module projectif de rang maximal	133
14.1. Résumé	133
14.2. Homotopies de sections	133
14.3. Le calcul de $(p^*)^{-1}$	135
15. La dimension 2	137
15.1. Résumé	137
15.2. L'homomorphisme $f : W^{lf}(A) \rightarrow W^-(A)$	137
15.3. L'homomorphisme $\varphi : \widetilde{CH}^2(A) \rightarrow K_0^{Sp}(A)$	144

16. Le groupe de Chow-Witt maximal d'une $\mathbb{R}$-algèbre lisse	151
16.1. Résumé	151
16.2. Premiers pas	152
16.3. Le calcul de $\widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}})$	154
16.4. La suite exacte	158
17. Les groupes des classes d'Euler	161
17.1. Résumé	161
17.2. Définition du groupe des classes d'Euler et premiers résultats	161
17.3. Le groupe des classes d'Euler noethérien	165
17.4. Quelques résultats	168
A. Théorème d'Eisenbud-Evans et Théorème de Bertini	171
A.1. Théorème d'Eisenbud-Evans	171
A.2. Théorème de Bertini	172
B. Catégories triangulées	175
B.1. Définition	175
B.2. Exemples de catégories triangulées	177
C. Le groupe de Witt d'une catégorie exacte	181
C.1. Définitions	181
C.2. Orthogonalité	182
C.3. Fonctorialité	183
D. Les groupes de Witt de catégories triangulées	185
D.1. Définitions	185
D.2. La suite exacte de localisation	188
E. Remarques sur les groupes de Witt d'un corps	193
E.1. Le groupe de Witt $W(k, L)$	193
E.2. Le groupe de Witt $W(k, \text{Ext}_A^n(k, A))$	194
Bibliographie	195

