

BOREL ET LA MARTINGALE DE SAINT-PÉTERSBOURG

Bernard BRU, Marie-France BRU, Kai Lai CHUNG (*)

RÉSUMÉ. — On se propose d'examiner sur un exemple, le paradoxe de Saint-Petersbourg, la façon dont Borel « expose » la science de son temps. La première partie indique sommairement la place singulière de la vulgarisation dans l'œuvre de Borel. Les deux parties suivantes présentent dans l'ordre chronologique les contributions boréliennes au paradoxe de Saint-Petersbourg qui s'échelonnent sur plus de cinquante ans; elles indiquent comment Borel aborde le problème en le replaçant dans une réflexion au long cours, scientifiquement très riche, sur le « paradoxe des martingales », ces « systèmes de jeu » qui prétendent faire la fortune d'un joueur au jeu de pile ou face. Borel donne de ce problème une solution originale qui anticipe une égalité fondamentale de la théorie mathématique naissante des martingales. On signale en particulier le rôle paradoxal joué par Félix Le Dantec dans le développement de la pensée borélienne sur ces thèmes. Une annexe rétablit en langue moderne les « martingales de Borel ».

ABSTRACT. — **BOREL AND THE ST. PETERSBURG MARTINGALE.** — This paper examines—by means of the example of the St. Petersburg paradox—the way in which Borel “reveals” the science of his day. The first part sketches the singular place of popularization in Borel's work. The two parts that follow give a chronological presentation of Borel's contributions to the St. Petersburg paradox, contributions that evolved over a period of more than fifty years. These show how Borel approaches the problem by replacing it with a lengthy—and scientifically rich—reflection on the “martingale paradox,” these “systems of games” that purport to determine the outcome of coin-tossing. Borel gives an original solution to this problem that anticipates the fundamental equality of the nascent mathematical theory of martingales. The paradoxical role played by Félix Le Dantec in the development of Borel's thought on these themes is highlighted. An appendix recasts Borel's concept of martingales in modern terms.

1. VULGARISATION BORÉLIENNE.

Émile Borel (1871–1956) est connu pour sa « mesure » et ses « ensembles

(*) Texte reçu le 3 septembre 1999, révisé le 3 avril 2000.

Bernard BRU, Université René-Descartes, Laboratoire de statistique médicale, 45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris CEDEX 06 (France).

Marie-France BRU, Université Denis-Diderot, UFR de mathématiques, 2 place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05 (France).

Kai Lai CHUNG, Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA 94305 (USA).

mesurables » (1894–1898), pour la propriété dite de Borel-Lebesgue (1894), peut-être aussi pour « l'ordre », la « croissance régulière » et les zéros des fonctions entières (1896–1900), les séries divergentes (1896–1901), ses contributions à la théorie de l'approximation (1905) ou sa théorie des fonctions monogènes (1894–1912) et, bien sûr, pour les « probabilités dénombrables » (1909), mais on considère parfois qu'il a abandonné la recherche mathématique à partir de 1914 pour se consacrer entièrement à sa carrière politique et administrative (il fut secrétaire général du Gouvernement, ministre, député, membre des plus importantes commissions de l'Assemblée nationale, directeur de l'Institut Henri Poincaré, etc.) et à la rédaction ou la direction d'ouvrages de vulgarisation et d'enseignement, notamment d'un grand *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* en 18 fascicules (1924–1939). Borel a continué en fait de publier des travaux mathématiques tout au long de sa carrière universitaire à la Sorbonne où il est professeur de 1904 à 1940, et après son départ à la retraite. En particulier, après la seconde guerre mondiale, débarrassé de la plupart de ses mandats politiques nationaux et locaux et de ses responsabilités universitaires, Borel a publié de 1946 à 1953 près de quarante articles ou livres dont certains sont d'une étonnante originalité.

Questions de style

Il est vrai que Borel, par un singulier travers, s'ingénie à dissimuler ses idées les plus intéressantes dans des publications où l'on ne s'attend guère à les rencontrer et sous une forme si particulière qu'on hésite à les reconnaître et qu'on se demande même s'il en saisit toute la richesse potentielle. Citons par exemple sa remarquable classification des ensembles de mesure nulle, commencée en 1911, reprise et développée seulement dans un traité élémentaire de *Théorie des ensembles* de la collection « L'éducation par la science » qu'il dirige chez Albin Michel [1949a], ou encore sa solution mathématique du problème de Saint-Petersbourg soigneusement cachée, comme nous allons le voir, dans un volume de la collection « Que sais-je ? » [Borel 1950], intitulé *Probabilité et certitude*. Bien que cela sorte de notre sujet, nous pourrions assurément faire les mêmes observations pour la plupart des contributions boréliennes importantes, sa théorie de la mesure par exemple, qu'il ne consentira jamais à préciser vraiment, ou sa théorie des probabilités dénombrables dont certains, ici ou là, continuent à nier qu'elle ait jamais été fondée en droit. Mais ce qui n'était au début

du siècle qu'habitude savante privilégiant dans la rédaction des grands textes mathématiques l'exposition des idées, la syntaxe et l'esthétique d'une langue bien faite, plutôt que la rigueur logique et mathématique qui allait de soi, sans qu'il fût nécessaire d'y insister, ou les raisonnements intermédiaires que le lecteur était censé « voir facilement », deviendra peu à peu un parti pris délibéré et systématique. Borel entend maintenir dans le flou les définitions en forme des objets qu'il manipule et donner aux énoncés qui en précisent la nature et, plus encore, à leurs démonstrations une grande latitude d'interprétation et de généralité, alors même que les mathématiques d'après-guerre s'épurent, s'axiomatisent et se corsètent de toute part pour mieux se protéger des dérives laxistes qui ignorent la complexité véritable des objets mathématiques et des pièges de la raison où elles perdent leur âme grecque.

Pourtant Borel a triomphé dans sa prime jeunesse des grandes et des petites olympiades mathématiques de son temps (voir [Lebesgue 1991], [Guiraldenq 1999]); par exemple, il s'est astreint à classer pour les besoins d'un concours académique, le prix Vaillant de 1904, tous les déplacements à trajectoires sphériques, dont l'équation fondamentale comporte 17 termes, et l'on peut lui reconnaître pour le moins certaines capacités logiques et combinatoires. Pourquoi ne consent-il pas à les utiliser lorsqu'il a soudain une de ces idées capables de bouleverser le cours des choses, par exemple l'idée de la mesure de Borel, unique prolongement dénombrablement additif de la longueur des intervalles, apte à mesurer de proche en proche tous les ensembles boréliens dont la théorie borélienne des fonctions a besoin ? Pourquoi en indique-t-il sommairement l'idée sans attacher d'importance à la rigueur ou à la généralité, de sorte qu'on ne sait jamais de quoi il parle, ni à qui il s'adresse ? Pourquoi ses travaux si profonds de calcul des probabilités sont-ils présentés de telle manière qu'il soit possible de soutenir, comme le font certains et non des moindres, que jamais il n'énonça ni ne démontra de façon précise et incontestable le moindre résultat mathématique identifiable ? La réponse donnée en général est que les idées mathématiques de Borel sont trop en avance sur ses possibilités techniques et que, s'il se contente d'une exposition aussi peu satisfaisante pour un mathématicien d'aujourd'hui, c'est qu'il ne peut en fournir de meilleure. Borel encouragerait d'ailleurs ce type d'analyse, lui qui répondait lorsqu'il était interrogé à ce sujet, qu'en effet il y aurait

lieu d'entrer dans de plus grands détails mais que cela risquait d'être long, en tout cas trop fastidieux pour qu'il songeât à s'y attacher et qu'il avait mieux à faire. Il admettait d'ailleurs volontiers qu'il avait abandonné les « hautes mathématiques » après la guerre de 1914 (voire même dès 1905), ne se sentant plus la « force de tête » pour s'y adonner vraiment [Marbo 1968], « orgueilleuse modestie », que lui reprochait amicalement Lebesgue auquel il écrivait en 1909 qu'il éprouvait pour la carrière mathématique un « profond dégoût » [Lebesgue 1991]. Mais on n'atteint pas, ce faisant, le fond de la question. Borel, mathématicien brillant et visionnaire, s'est voulu très tôt un missionnaire ; la science qu'il a cultivée d'abord, comme Hermite et Poincaré, pour elle-même, pour sa beauté, sa rigueur morale, son austère grandeur, ne mérite qu'on s'y consacre qu'à condition d'être mise au service de l'homme et de la société.

Pour ce qui est de la société, le fait est assez connu, les mathématiques boréliennes ont ou doivent avoir une « valeur pratique », et Borel développera dès 1906 ce thème à la fois dans ses cours, dans son activité éditoriale comme directeur fondateur de la *Revue du mois*, et dans son engagement pour le développement des applications du calcul des probabilités : physique statistique, biologie, sciences de l'ingénieur, actuariat, etc. Nous n'y reviendrons pas ici. Pour ces mathématiques-là, seules comptent en définitive les « formules », qu'il convient d'établir le plus rapidement possible, sans trop se soucier des hautes mathématiques dont on utilise seulement les techniques de calcul. Mais comme il arrive parfois que l'établissement desdites formules nécessite la mise en œuvre de méthodes originales, les mathématiques tout au long de l'histoire ont bénéficié des apports inattendus de leurs « applications » (pensons à la mécanique newtonienne, à la théorie de la chaleur ou simplement au calcul des probabilités). Et Borel ne paraît pas avoir jamais remis en cause le « rôle bienfaisant » de cette mathématique « pratique », intimement liée à la Science la plus haute et la plus pure mais engagée dans l'action, au contraire il le magnifie constamment, à l'exemple de son ami Jean Perrin qu'il aime à citer : « *L'Aventure merveilleuse où l'Humanité se trouve engagée depuis une génération à peine, et qui sans doute marque l'aurore d'une Civilisation nouvelle, n'a pu se dérouler en son rythme qui va précipitant de plus en plus, que grâce à un progrès sans cesse accéléré de la Science* » [Borel 1932, p. 99].

Exposer, inventer

Pour l'homme, la chose est moins évidente; il s'agit naturellement du bonheur individuel, sinon quel sens cela aurait-il? Borel, pour l'avoir expérimenté sur lui-même, adhère à la théorie cartésienne et socratique du bonheur par la clarté des idées, cette harmonie sereine qui naît d'une explication lumineuse. La science seule, et la science au plus haut niveau possible à une époque donnée, peut contribuer véritablement à répondre aux exigences d'absolu et de vérité dont tout homme est naturellement doté, et c'est aux savants les plus avancés qu'incombe cette tâche d'exposition dont la noblesse n'échappera pas mais dont la difficulté paraît insurmontable. Comment expliquer à un public raisonnablement cultivé, ou simplement à un lecteur unique, l'idée de mesure par exemple, ou toute autre idée mathématique, de sorte qu'elle apparaisse avec autant d'évidence et de clarté qu'à celui qui le premier la conçut? Assez vite, Borel s'est persuadé (à tort ou à raison, c'est un autre débat) que la rigueur logique nécessaire, axiomatique générale et techniques démonstratives adaptées, n'apportait rien à cet égard : le lecteur mathématicien pourrait « aisément » la reconstituer (s'il en est capable, sinon tant pis pour lui!); quant au lecteur ordinaire, elle lui serait tout à fait impénétrable et donc sans valeur d'aucune sorte. Mais est-il possible, sans technique mathématique que le strict minimum, d'élever le lecteur vers le bonheur du savant, lui présenter non seulement une version métaphorique ou sentimentale des grandes idées scientifiques, mais une approche aussi serrée que possible des concepts dans leur intégrité et leur intuition primitives? Il faudrait pour cela accumuler de toutes les façons possibles des esquisses de démonstrations, des pistes de développements nouveaux, des calculs explicites lorsque c'est possible, ou même présenter des idées tout à fait nouvelles que cette curieuse méthode autorise et qu'on n'imaginerait pas sans elle, et surtout des explications claires et lucides, inventer au besoin de nouvelles explications pour montrer que la raison humaine a raison de tout pourvu qu'on la laisse libre et qu'on ne se berce pas de mots.

Borel commence par appliquer ce mode d'exposition à son œuvre mathématique, il explique par exemple aux lecteurs de la collection *l'Avenir de la science* dirigée par Jean Rostand, le lemme de recouvrement de Borel(-Lebesgue) dont la simplicité biblique cache la profondeur véritable, et comment concevoir que les points rationnels d'un double