

Astérisque

MARIE-LOUISE MICHELSON

Surfaces minimales dans les sphères

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 115-130

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__115_0>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SURFACES MINIMALES DANS LES SPHÈRES

Marie-Louise MICHELSON

I. INTRODUCTION.

Le but de cet article est d'étudier des immersions minimales de S^2 dans S^{n-1} . Il s'agit surtout des travaux de Calabi [2], [3] avec une amélioration de Barbosa [1]. L'idée directrice, analogue à l'argument de H. Hopf [5], est d'utiliser le fait que sur S^2 il n'existe aucune p -forme holomorphe, pour $p > 0$, ce qui rigidifie la géométrie.

Le scénario découle de l'observation suivante : une sous-variété complexe d'une variété kählérienne doit être minimale. Donc une immersion holomorphe $\varphi : M \rightarrow X$ dans une variété kählérienne X est toujours une immersion minimale. D'ailleurs soit $\pi : X \rightarrow Y$ une submersion riemannienne et soit $\varphi : M \rightarrow X$ une immersion minimale telle que φ soit horizontale pour la submersion π , alors $\pi \circ \varphi : M \rightarrow Y$ est minimale. Ainsi, si $\pi : X \rightarrow Y$ est une submersion riemannienne d'une variété kählérienne X et si φ est une application d'une surface de Riemann dans X de telle sorte que φ soit holomorphe et horizontale par rapport à la submersion π , alors $\pi \circ \varphi$ est minimale.

Or pour une immersion minimale conforme ψ de S^2 en $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, E. Calabi a montré qu'il existe une réciproque. Ainsi il a construit une sous-variété X de $\mathbb{C}P^N$, avec N grand, et une fonction holomorphe, Ξ , de S^2 dans X telles que :

- 1) il y ait une submersion riemannienne $\pi : X \rightarrow S^{n-1}$,
- 2) Ξ soit un relèvement de φ ,
- 3) Ξ soit horizontale par rapport à la submersion de π .

E. Calabi en a tiré le théorème suivant.

THÉORÈME PRINCIPAL (Calabi). - Soit $\varphi : S^2 \rightarrow S^{n-1}$ une immersion minimale telle que l'image de S^2 ne soit pas contenue dans un équateur de S^{n-1} . Alors

- 1) $n-1$ est pair, disons $2m$,
- 2) l'aire de S^2 immergée est $2k\pi$, où k est un entier,
- 3) $k/2 \geq \binom{m+1}{2}$. Cette borne inférieure est atteinte.

Ce résultat a été amélioré de la façon suivante.

Amélioration du Théorème Principal (Barbosa). Soit $\varphi: S^2 \rightarrow S^{n-1}$ une immersion vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Alors l'aire de S^2 immergée est $4\pi q$ où q est un entier.

Remarque : La preuve du théorème principal est aussi valable pour une immersion minimale ramifiée de S^2 dans S^{n-1} . Par immersion minimale ramifiée, on veut dire une application φ lisse dont les points singuliers (ceux où $d\varphi$ s'annule) sont isolés et qui est minimale en dehors de ces points. Puisque toutes les applications $\varphi: S^2 \rightarrow S^{n-1}$ harmoniques et non-constantes sont des immersions minimales ramifiées (cela reste vrai même si on remplace S^{n-1} par une variété riemannienne quelconque, cf. [4]), on a ce théorème pour les applications harmoniques de S^2 dans S^{n-1} .

II. CONSTRUCTION.

Soit S^{n-1} la sphère de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$ et soit $\psi: S^2 \rightarrow S^{n-1}$ une immersion isométrique minimale. Prenons les coordonnées isothermes suivantes $z = x + iy$. La métrique induite est

$$(1) \quad ds^2 = 2F(z, \bar{z}) |dz|^2$$

où $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, et $F = \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 = \left| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \right|^2$. Donc $2F \equiv \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 = \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|^2$ et $\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle \equiv 0$.

L'équation des surfaces minimales est

$$(2) \quad \Delta \psi = -2\psi ;$$

comme, pour une surface minimale,

$$(3) \quad \Delta = \frac{1}{2F} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{2}{F} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} ,$$

donc

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi = -F\psi$$

Nous allons travailler dans $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$, donc dans $\mathbb{C}^n$ avec une

structure réelle distinguée. Indiquons par "." l'extension bilinéaire complexe de la métrique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{C}^n$. Nous prolongerons encore cette métrique à

$$(\wedge_{\mathbb{R}}^p \mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \wedge_{\mathbb{C}}^p \mathbb{C}^n \text{ par}$$

$$(5) \quad v_1 \wedge \dots \wedge v_p \cdot w_1 \wedge \dots \wedge w_p = \det_{\mathbb{C}}(v_i \cdot w_j) \quad .$$

Par contre, la métrique hermitienne sera indiquée par

$$(6) \quad (r, w) = r \cdot \bar{w} \quad .$$

Or nos équations sont

$$(7) \quad |\psi|^2 \equiv 1 \quad \text{car } S^{n-1} \text{ est de rayon } 1 ,$$

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} \psi_z \cdot \bar{\psi_z} &= F \\ \psi_z \cdot \psi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{car } z = x + iy, \text{ } x \text{ et } y \text{ étant des}$$

$$(9) \quad \text{coordonnées isothermes,}$$

$$(10) \quad \psi_{zz} = -F\psi \quad \text{par l'équation des surfaces minimales.}$$

Observons que $\psi \cdot \psi \equiv 1$ entraîne que

$$(11) \quad \psi \cdot \psi_z \equiv \psi \cdot \bar{\psi_z} \equiv 0 \quad .$$

De la même manière $\psi_z \cdot \psi_z \equiv 0$ entraîne que

$$(12) \quad \psi_z \cdot \psi_{zz} \equiv \psi_z \cdot \bar{\psi_{zz}} \equiv 0 \quad .$$

LEMME 13 . - Soit $\psi : S^2 \rightarrow S^{n-1}$ une immersion minimale isométrique et x, y des coordonnées isothermes pour ψ . Soit ϕ la section de $\otimes^4 T^{1,0}$ définie par

$$\phi \equiv (\psi_{zz}, \psi_{zz}) dz^4 \quad \text{où } z = x + iy \quad .$$

Alors ϕ est bien définie et holomorphe.

Preuve : Prenons deux coordonnées locales holomorphes z et w . On a $\psi_w = \frac{dz}{dw} \psi_z$.
Donc

$$(14) \quad \psi_{ww} = \frac{d^2 z}{dw^2} \psi_z + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 \psi_{zz} \quad .$$

Ainsi

$$(15) \quad \psi_{ww} \cdot \psi_{ww} = \left(\frac{dz}{dw}\right)^4 \psi_{zz} \cdot \psi_{zz}$$

est bien défini. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (\psi_{zz} \cdot \psi_{zz}) &= 2\psi_{zzz} \cdot \psi_{zz} \\ &= 2(\psi_{zz})_z \cdot \psi_{zz} \\ &= 2(-2F\psi)_z \cdot \psi_{zz} \\ &= -4(F_z \psi + F\psi_z) \cdot \psi_{zz} = 0, \end{aligned}$$

en utilisant (11) après avoir dérivé (9).

Par ailleurs, il n'existe aucune p-forme holomorphe sur S^2 . Donc $\Phi \equiv 0$. ■

COROLLAIRE 16 .- Soit $\psi : S^2 \rightarrow S^{n-1}$ une immersion minimale isométrique et z un paramètre isotherme. Alors, l'équation suivante est vérifiée

$$\psi_{zz} \cdot \psi_{zz} \equiv 0$$

et donc

$$\psi_{zzz} \cdot \psi_{zz} \equiv 0.$$

Par récurrence, en considérant la section Φ_k de $\otimes^{2k}_T 1, 0'$ définie par

$$\Phi_k \equiv \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial z^k}, \frac{\partial^k \psi}{\partial \bar{z}^k} \right) dz^{2k}$$

que l'on peut prouver être bien définies et holomorphes, on peut montrer :

LEMME 17 .- Soit $\psi : S^2 \rightarrow S^{n-1}$ une immersion minimale isométrique et z un paramètre isotherme, alors

$$(18) \quad \frac{\partial^i \psi}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial^j \psi}{\partial \bar{z}^j} \equiv 0, \quad i+j \geq 1$$

quels que soient les entiers i et j.

Définissons des fonctions ψ_k et Ξ_k à valeurs dans $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$: