

Astérisque

RONALD R. COIFMAN

YVES MEYER

Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels

Astérisque, tome 57 (1978)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__57__1_0

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Table des matières

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I.- Les inégalités L^2 pour la classe $S_{0,0}^0$	5
CHAPITRE II.- Estimations L^2 pour les classes exotiques ..	27
CHAPITRE III.- Les commutateurs	62
CHAPITRE IV.- Opérateurs pseudo-différentiels et intégrales singulières de Calderón-Zygmund	76
CHAPITRE V.- Opérateurs pseudo-différentiels et espaces de Hardy généralisés	116
CHAPITRE VI.- Mesures de Carleson et estimations L^2	143
CONCLUSION.....	179
APPENDICE I	181
APPENDICE II	193
BIBLIOGRAPHIE	195

INTRODUCTION

Autour de la théorie "indéfiniment dérivable" des opérateurs pseudo-différentiels (o.p.d.), s'est développée, sous l'impulsion de A. CALDERÓN et A. ZYGMUND une théorie "non orthodoxe" ; on y cherche les conditions les plus faibles possibles de régularité permettant d'obtenir les résultats que l'on a, sans difficulté, dans les cas C^∞ usuels.

L'objet de ces notes est de décrire, avec précision, ce "voisinage de la théorie classique".

On se propose alors d'alléger le plus possible les hypothèses tout en conservant la conclusion désirée. On obtiendra le plus souvent des conditions nécessaires et suffisantes ; aussitôt on sort de la théorie classique (qui ne décrit que des conditions suffisantes).

Naturellement ce travail nous obligera à introduire des démonstrations différentes de celles que l'on peut trouver dans la littérature (ces dernières avaient déjà souvent été poussées jusqu'à leurs limites).

Enfin les hypothèses minimales à faire dépendront du problème étudié.

Les chapitres I et II traitent de la continuité des o.p.d. classiques ou exotiques sur les espaces fonctionnels usuels (L^2 , L^p , fonctions hölderiennes etc.).

Au chapitre III, nous étudions l'énoncé suivant : "Si $\mathcal{D}$ est un champ de vecteurs à coefficients C^∞ et si T est un o.p.d. classique d'ordre 0, le commutateur $[T, \mathcal{D}]$ est borné sur L^2 ."

On se propose de ramener à sa forme minimale l'hypothèse de régularité faite sur les coefficients de $\mathcal{D}$. On examine ensuite celle faite sur T .

Les opérateurs définis par des intégrales singulières de CALDERÓN-ZYGMUND constituent, eux aussi, un "voisinage" des o.p.d. classiques d'ordre 0 et forment la matière du chapitre IV.

Le chapitre V traite de l'action des o.p.d. classiques ou exotiques sur l'espace L^∞ des fonctions mesurables et bornées. On doit alors introduire l'espace BMO (car les o.p.d. classiques d'ordre 0 ne sont pas bornés sur L^∞).

L'espace BMO est le dual de H^1 (FEFFERMAN et STEIN) et l'on traite alors de la continuité des o.p.d. exotiques sur H^1 en prouvant une conjecture de E. STEIN ($S_{0,0}^{-n/2}$ est borné sur $H^1(\mathbb{R}^n)$).

Dans le chapitre VI les estimations L^2 pour les opérateurs sont obtenues par des procédés très différents où les mesures de CARLESON jouent un grand rôle.

C'est un plaisir de remercier R. BEALS, A. CALDERÓN et E. STEIN qui nous ont initiés à cette théorie et dont les encouragements ont conduit à ces notes. La rédaction doit beaucoup aux conseils de J. SJÖSTRAND. Le travail de dactylographie de Mme DUMAS a été, comme d'habitude, excellent et nous l'en remercions tout particulièrement.

R. VAILLANCOURT a bien voulu lire ces notes pendant le congrès de WILLIAMSTOWN et en extirper de nombreuses erreurs. Nous lui en sommes très reconnaissants.