

Astérisque

ENRICO BOMBIERI

Le grand crible dans la théorie analytique des nombres

Astérisque, tome 18 (1974)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__18__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__18__1_0)

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.	2
§ 0 Préliminaires.	4
§ 1 Quelques exemples. Le crible de Linnik et Renyi.	6
§ 2 La forme analytique additive du grand crible.	13
§ 3 Applications arithmétiques. Le crible de Selberg (I).	20
§ 4 La forme multiplicative du grand crible.	24
§ 5 La forme analytique multiplicative du grand crible.	29
§ 6 Applications. Le théorème de Linnik.	39
§ 7 Applications. Le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.	57
§ 8 Le crible de Selberg (II).	65
§ 9 Application du crible de Selberg.	71
§ 10 Théorèmes de densité.	76
§ 11 Notes Bibliographiques.	83
BIBLIOGRAPHIE	84
SUMMARY	86
§ 12 Some recent developments (added for the second edition, 1987)	89

INTRODUCTION

Les notes qui suivent développent un cours donné en Mai 1973 au Collège de France sur "le grand crible".

La méthode du grand crible est, à l'heure actuelle, l'un des outils les plus puissants en théorie multiplicative des nombres. Grosso modo, on peut la définir comme l'analyse harmonique des progressions arithmétiques, aussi bien du point de vue additif que multiplicatif. Un rôle fondamental y est joué par deux inégalités (cf. th. 4, cor. 2 et th. 7, 8, 7A) que l'on peut interpréter comme des variantes de l'inégalité de Bessel pour des systèmes "presque" orthogonaux de fonctions.

Les applications à la théorie des nombres prennent deux formes :

La première, et la plus élémentaire, est la forme additive, étudiée aux §§ 2,3, qui conduit directement aux résultats arithmétiques typiques du crible de Selberg. On trouvera au §§ 0, 1 la définition d'un crible, et le théorème de Linnik sur le plus petit non-reste quadratique mod. p ; nous avons donné aussi la formulation de Rényi du grand crible.

La seconde forme du grand crible est multiplicative ; elle concerne l'analyse harmonique relativement aux caractères $\chi(n)$ de Dirichlet ; c'est l'objet des §§ 4, 5.

La suite de ces notes est consacrée aux applications de la forme multiplicative du grand crible. Au § 6, nous démontrons un théorème de densité pour les zéros des fonctions L , et nous en déduisons le théorème de Linnik sur le plus petit nombre premier appartenant à une progression arithmétique. Une variante du théorème de densité, utilisable dans l'étude des nombres premiers appartenant à de petits intervalles, est discutée au § 10.

Le § 7 contient une démonstration simplifiée du théorème de Bombieri-Vinogradov sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Les §§ 8, 9 appliquent ce résultat au théorème de Rényi sur l'équation $p+2 = p_1 \dots p_r$, avec $p, p_1, \dots, p_r$ premiers ; nous donnons une démonstration simple du fait que cette équation est résoluble avec $r \leq 4$.

Le § 11 contient des remarques bibliographiques relatives aux différentes sections.

En résumé, ces notes contiennent quelques-unes des applications les plus importantes de la méthode du grand crible : théorèmes de densité, distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, lien avec le petit crible de Brun-Selberg, etc. Toutefois, l'exposé n'a rien de systématique : je me suis borné à donner des échantillons des diverses façons dont on peut appliquer la méthode ; bien souvent aussi, pour simplifier les démonstrations, je n'ai pas donné les énoncés les plus forts possibles.

§ 0. Préliminaires.

Soient :

- (a) un ensemble $\mathcal{N}$ d'entiers,
- (b) un ensemble $\mathcal{P}$ de nombres premiers,
- (c) pour tout $p \in \mathcal{P}$, un ensemble Ω_p de classes mod p .

Un crible est par définition la donnée de $(\mathcal{N}, \mathcal{P}, \Omega_p)$ et l'on s'intéresse à l'ensemble criblé

$$\mathcal{N}_0 = \{n \in \mathcal{N} \mid n \pmod{p} \notin \Omega_p \text{ pour tout } p \in \mathcal{P}\}.$$

On remarque que, dans la pratique, on prend

$$\mathcal{N} = \{M < n \leq M+N\}$$

un intervalle de longueur N , ou

$$\mathcal{N} = \{p \leq N\}$$

l'ensemble des nombres premiers $\leq N$, ou

$$\mathcal{N} = \{f(n), n \leq N\}$$

où f est un polynôme.

Plaçons-nous dans le premier cas, et posons

$$\omega(p) = |\Omega_p|, \text{ nombre d'éléments de } \Omega_p.$$

Le problème fondamental est d'obtenir des majorations et des minoration pour $|\mathcal{N}_0|$ en fonction de $N, \mathcal{P}$ et des $\omega(p)$. L'ensemble criblé $\mathcal{N}_0$ est très sensible au choix des éléments de Ω_p , comme on le voit dans les exemples suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N} = (1, N) \\ \mathcal{P} = (p \leq N) \\ \Omega_p = \{0\} \end{array} \right. \\ \\ \text{II} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N} = (1, N) \\ \mathcal{P} = (p \leq N) \\ \Omega_p = \begin{cases} \{0\} & \text{si } p \leq N/2 \\ \{1\} & \text{si } N/2 < p \leq N \end{cases} \end{array} \right. \end{array}$$

Dans (I), $\mathcal{N}_0$ est l'ensemble des entiers $\leq N$ qui ne sont divisibles par aucun