

LA NOTION MÉDIÉVALE DE *CONTRACTIO* DANS L'*ARITHMETICA INTEGRA* DE MICHAEL STIFEL (1544)

Sabine Rommevaux-Tani

Résumé. — La notion de « *contractio* » apparaît au Moyen Âge dans différents contextes, en particulier dans le *De ortu scientiarum* de Robert Kilwardby (ca. 1215–1279), à propos de la question de la subordination des sciences. Ce dernier prend alors l'exemple du livre X des *Éléments* d'Euclide afin de montrer comment la classification des lignes irrationnelles est subordonnée à l'arithmétique au moyen de la *contractio* des nombres dans les grandeurs. Nous verrons que la lecture que fait Michael Stifel du livre X des *Éléments* d'Euclide dans son *Arithmetica integra* (1544) peut apporter un éclairage sur les propos de Kilwardby.

Abstract (The medieval notion of *contractio* in Michael Stifel's *Arithmetica integra* (1544))

The notion of “*contractio*” appears in the Middle Ages in various contexts, in particular in Robert Kilwardby's *De ortu scientiarum* (ca. 1215–1279), on the question of the subordination of sciences. Kilwardby then takes the example of Book X of Euclid's *Elements* to show how the classification of irrational lines is subordinated to arithmetic by means of the contraction of numbers into geometric quantities. We shall see that Michael Stifel's interpretation of Book X of Euclid's *Elements* in his *Arithmetica integra* (1544) may shed some light on Kilwardby's remarks.

Texte reçu le 18 juillet 2018, accepté le 30 août 2019, révisé le 18 février 2020, version finale reçue le 26 juin 2020.

S. Rommevaux-Tani, CNRS, SPHere, UMR 7219, Univ. de Paris, Bâtiment Condorcet, Case 7093, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris cedex 13, France.

Courrier électronique : sabine.rommevaux@u-paris.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 00A30, 01A35, 01A40.

Mots clés : Euclide, Robert Kilwardby, Michael Stifel, Moyen Âge, xvi^e siècle, irrationalité, arithmétique, géométrie, livre X des *Éléments* d'Euclide.

Key words and phrases. — Euclid, Robert Kilwardby, Michael Stifel, Middle Ages, sixteenth century, irrationality, arithmetic, geometry, Book X of Euclid's *Elements*.

Michael Stifel fait paraître en 1544, à Nuremberg, une *Arithmetica integra* en trois livres, dont le premier livre contient une arithmétique des nombres entiers et fractionnaires, le deuxième livre une classification des nombres irrationnels et une lecture arithmétique du livre X des *Éléments* d'Euclide et le troisième livre une algèbre. Il s'agit donc fondamentalement d'un livre d'arithmétique dans lequel sont traités, de manière parallèle, les nombres entiers et fractionnaires, les nombres radicaux ou irrationnels et les nombres cossiques, soit les nombres de l'algèbre¹.

Dans cette *Arithmetica integra*, la géométrie n'est toutefois pas absente. Dans une précédente étude [Rommevaux-Tani 2014], j'avais déjà noté le lien particulier qu'établit Stifel entre arithmétique et géométrie, au livre II, grâce à la *contractio* de nombres rationnels ou irrationnels dans des carrés. Je voudrais revenir ici sur ce concept, en m'intéressant à son origine médiévale d'une part, et à l'usage qu'en fait Stifel d'autre part.

1. LA NOTION MÉDIÉVALE DE « CONTRACTIO »

La notion de « *contractio* » apparaît au Moyen-Âge, notamment à propos de la musique et plus généralement dans le contexte de réflexions sur les sciences dites intermédiaires, ou *scientiæ mediæ*. Ainsi, dans son ouvrage, *Sinnlichkeit und Vernunft in der mittelalterlichen Musiktheorie*, Frank Hentschel [2000, p. 144–145] dresse une liste de textes dans lesquels se trouve l'expression « *numerus contractus* » pour désigner l'objet de la musique, soit le nombre contracté dans les sons. La notion de *contractio* se trouve, par exemple, dans les *Questiones mathematicæ* de Raoul le Breton ou Radulphus Brito (ca. 1270–1320), maître ès art à l'université de Paris, puis théologien et proviseur de la Sorbonne. Dans la question 7 de ces *Questiones mathematicæ*, qui demande si le nombre des sciences mathématiques se limite à quatre, Raoul le Breton explique que le sujet de la mathématique est la quantité abstraite des qualités sensibles, qui se décline en la grandeur ou

¹ Ainsi, on trouve dans chacun des livres un *Algorithme* (*Algorismus*) des nombres considérés, soit des entiers et des fractions (livre I, chap. i), des radicaux (livre II, chap. iv), des sommes et différences de nombres radicaux (livre II, chap. ix), des fractions entre sommes ou différences de radicaux (livre II, chap. xi), des racines des binômes ou résidus, soit des nombres de la forme $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm b}$ et $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, où a et b sont des nombres rationnels, le premier terme de la somme ou de la différence étant toujours plus grand que le second (livre II, chap. xii) et enfin des nombres de l'algèbre que sont les nombres cossiques, soit l'équivalent de nos monômes (livre III, chap. iii).

le nombre [Hentschel 2000, p. 282, 284]². Quand le mathématicien considère le nombre absolument et par soi, il fait de l'arithmétique, quand il considère la grandeur absolument et par soi, il fait de la géométrie; par contre, les objets de l'astrologie ou astronomie sont les grandeurs contractées dans les corps célestes et ceux de la musique sont les nombres contractés dans les sons ou plutôt dans les rapports qui sont dans les sons [Hentschel 2000, p. 284]³. Ainsi, un premier processus d'*abstractio* à partir des qualités sensibles produit la quantité, ou la grandeur et le nombre, puis un second processus de *contractio* dans le sensible, conduit de la grandeur aux corps célestes et du nombre aux sons⁴. Ce faisant, la géométrie et

² « Utrum sint tantum quattuor scientiæ mathematicæ. [...] Ad istam questionem dico primo quod sunt quattuor scientiæ mathematicæ, scilicet arithmetica, musica etc. [...] Primum demonstratur quia : mathematica est de eo, quod est abstrahibile per naturam suam a qualitatibus sensibilibus et quantum ad suum esse non determinat sibi aliquam determinatam complexionem qualitatuum sensibilibus, modo omnis quantitas abstrahibilis a qualitatibus sensibilibus est vel magnitudo vel numerus, ergo omnis mathematica est de magnitudine vel numero. » (Est-ce qu'il existe seulement quatre sciences mathématiques? [...] À cette question je réponds d'abord que les sciences mathématiques sont au nombre de quatre, soit l'arithmétique, la musique etc. [...] La première assertion est démontrée ainsi : la mathématique est au sujet de ce qui est susceptible d'être abstrait, selon sa nature, des qualités sensibles et qui, quant à son être, n'implique pas un mélange déterminé de qualités sensibles. Or toute quantité susceptible d'être abstraite des qualités sensibles est ou bien la grandeur, ou bien le nombre, donc toute mathématique est au sujet de la grandeur ou du nombre.)

³ « Modo magnitudo potest dupliciter considerari, uno modo secundum se et absolute, secundum quod est abstrahibile a qualitate sensibili, et sic de ipsa est geometria, vel potest considerari, ut est contracta ad corpus cæleste, et sic magnitudo, scilicet contracta ad corpus cæleste, est subiectum in astrologia. Et quomodo hoc sit verum, apparebit post. Si autem sit de numero, hoc est dupliciter, quia numerus potest considerari secundum se et absolute, ut est abstrahibilis a qualitatibus sensibilibus, et sic de ipso est arithmetica, vel ut est contractus ad sonos, et sic est musica de ipso, sive est contractus ad proportionem, quæ sunt in sonis. » (Or la grandeur peut être considérée de deux manières, d'une manière pour elle-même et absolument, selon qu'elle est susceptible d'être abstraite de la qualité sensible, et alors à son sujet on a la géométrie, ou elle peut être considérée comme contractée dans un corps céleste, et alors la grandeur, contractée dans un corps céleste, est le sujet de l'astrologie. Et pourquoi cela est vrai apparaîtra plus loin. Et pour ce qui est du nombre, c'est de deux manières, car le nombre peut être considéré pour lui-même et absolument, selon qu'il est susceptible d'être abstrait des qualités sensibles, et alors à son sujet on a l'arithmétique, ou bien selon qu'il est contracté dans les sons ou contracté dans les rapports qui sont dans les sons, et alors à son sujet on a la musique.)

⁴ On peut évoquer ici Aristote, *Métaphysique*, E, 1, 1026a [2008, p. 225] : « [...] certaines parties de la mathématique [traitent] d'objets immobiles, pourtant peut-être non séparables comme dans la matière [...]. » Par ailleurs, ce balancement entre *abstractio* et *contractio* peut être rapproché de celui entre l'« aphairesis » ou la soustraction, soit l'acte d'abstraction qui produit les objets mathématiques, et la « prosthesis », ou l'addition, par laquelle sont obtenus les objets physiques (je remercie ici Vincenzo De Risi qui m'en a fait la remarque). Voir à ce sujet [Cleary 1985].

l'arithmétique sont considérées comme proprement mathématiques, alors que la musique et l'astronomie sont en partie mathématiques et en partie naturelles [Hentschel 2000, p. 284–285]⁵; en d'autres termes, ce sont des *scientiæ mediæ*.

Quelques années avant Raoul de Breton, Robert Kilwardby (ca. 1215–1279), d'origine anglaise, fut lui aussi étudiant puis enseignant à l'université de Paris. Il rédige son ouvrage d'introduction à la philosophie, le *De ortu scientiarum*, probablement avant 1250, soit avant qu'il n'entre dans l'ordre des Dominicains et ne rejoigne l'université d'Oxford où il étudie la théologie et dont il deviendra régent [Sharp 1934, p. 1; Rodríguez Arias 1997, p. 467; Maierù 2013, p. 353]. Réfléchissant aux statuts des différentes branches des mathématiques, Kilwardby lie subordination des sciences et *contractio* [Kilwardby 1976, p. 45–46; Maierù 2013, p. 366–367]; rappelons que pour les auteurs médiévaux, une science est subordonnée à une autre quand elle en tire ses principes⁶. Voici donc comment Kilwardby introduit la notion de *contractio* :

Je ne vois pas d'inconvénient à ce que l'astronomie et la géométrie soient des sciences différentes et que pourtant l'une soit subordonnée à l'autre. En ef-

5 « Secundum demonstratur, scilicet quod duæ istarum sunt pure etc., et primo de arithmetica et geometria, quod si<n>t pure mathematicæ, quia illæ scientiæ sunt pure mathematicæ, quæ sunt de aliquo simpliciter et secundum se considerato, non contracto ad aliquam materiam sensibilem, modo arithmetica est de numero secundum se considerado, non contracto ad aliquam materiam sensibile, et etiam geometria est de magnitudine sic abstracta et considerata, quare istæ duæ pure sunt mathematicæ. Secundum demonstratur, scilicet quod musica et astrologia sint partim etc., quia istæ duæ considerant ens mathematicum contractum ad aliquod sensibile, sicut astrologia considerat magnitudinem contractam ad corpus cæleste. Musica autem sive musicus considerat numerum contractum ad sonos sive ad proportionem numerorum in sonis, ergo, cum istæ duæ considerent aliquid partim mathematicum et partim naturale, erunt partim mathematicæ et partim naturales. » (On démontre la seconde assertion, à savoir que deux d'entre elles sont pures etc. et d'abord au sujet de l'arithmétique et de la géométrie, que ce sont des mathématiques pures, car sont des sciences pures ces mathématiques qui traitent de choses considérées pour elles-mêmes et simplement et non pas contractées dans quelque matière sensible, or l'arithmétique traite du nombre considéré pour lui-même et non pas contracté dans quelque matière sensible et de même la géométrie est au sujet de la grandeur abstraite et considérée ainsi, donc ces deux sont des mathématiques pures. On démontre la seconde partie, à savoir que la musique et l'astrologie sont en partie etc., car les deux considèrent l'étant mathématique contracté dans quelque sensible, comme l'astrologie considère la grandeur contractée dans le corps céleste. Et la musique ou le musicien considère le nombre contracté dans les sons ou dans les rapports de nombres dans les sons, donc puisque les deux considèrent une chose en partie mathématique et en partie naturelle, elles seront en partie mathématiques et en partie naturelles.)

6 Pour une bonne étude de la notion médiévale de science subordonnée ou science subalterne, voir [Corbini 2009].

fet, la diversité d'une science vient de la diversité de son sujet ; la subordination vient de ce qu'un sujet est sous un sujet, en particulier lorsque la démonstration descend de la science supérieure vers l'inférieure, qui toutes deux s'épaulent. Note, comme cela est clair, que la diversité dans les sujets des sciences doit être considérée de trois manières : l'une est par séparation, comme la grandeur et le nombre harmonique, et celle-ci conduit à une véritable différence entre les sciences ; l'autre est par *contractio* et elle est double. En effet, ou bien la *contractio* est produite en raison de la différence dans un même genre et dans une même nature, comme sont les figures planes et le triangle, ou le triangle et l'isocèle, et une telle diversité ne produit pas une science différente, puisque par une même science sont considérés le sujet et les parties du sujet et les espèces. Ou bien la *contractio* est obtenue en raison de la différence avec un autre genre ou une autre nature, à partir de laquelle cependant ce qui est contracté est susceptible d'être fait un, comme sont la grandeur et le nombre l'une relativement à l'autre. En effet, ils sont de natures différentes et pourtant ils sont susceptibles d'être liés et d'être maintenus unis de sorte que le nombre est contracté en quelque sorte au moyen de la grandeur. En effet, les grandeurs peuvent être déterminées en nombre, de sorte qu'une même démonstration sera faite pour elles comme pour les nombres. En effet, une démonstration qui se déroule dans les nombres de manière absolue, se déroule dans les nombres des grandeurs ou, pour le dire mieux, dans les grandeurs déterminées de manière numérique⁷.

Ainsi, les sciences diffèrent selon leurs sujets. Mais il y a plusieurs modes de différenciation de ces sujets. Soit les sujets sont de genres totalement différents, comme sont la grandeur géométrique et le nombre musical, de sorte que les sciences de ces sujets, la géométrie et la musique, sont des sciences réellement séparées. Soit le sujet d'une science est lié au sujet de l'autre science, ce lien étant effectué au moyen de la *contractio*. Deux

⁷ Kilwardby [1976, p. 45–46] : « [...] non videtur mihi inconveniens quod astronomia et geometria sint diversæ scientiæ et tamen una sit alteri subalternata. Diversitas enim scientiæ est ex diversitate subiecti ; subalternatio ex eo quod subiectum est sub subiecto, præcipue cum descendat demonstratio a superiori in inferiorem, quæ duo sese compatiuntur. Quod ut pateat nota quod est considerare diversitatem in subiectis scientiarum triplicem : unam, quæ est per disparationem, sicut magnitudo et numerus harmonicus, et talis facit scientiarum veram diversitatem ; aliam, quæ est per contractionem et hæc est duplex. Aut enim contractio fit per differentiam eiusdem generis et naturæ, ut sunt figura plana et triangulus, vel triangulus et isosceles, et talis diversitas non facit diversam scientiam quia eiusdem scientiæ est considerare subiectum et partes subiecti et species. Aut fit contractio per differentiam alterius generis et naturæ, ex qua tamen et eo quod contrahitur natum sit fieri unum, et sic se habent ad invicem magnitudo et numerus. Sunt enim diversarum naturarum, et tamen nata sunt coniungi et contineri ita ut quodammodo contrahatur numerus per magnitudinem. Possunt enim magnitudines disponi in numero quodam ita quod eadem demonstratio fiet de illis quæ de numeris. Quæ enim demonstratio tenet in numeris absolute, tenet in numeris magnitudinum vel si potius dicitur in magnitudinibus numeraliter dispositis. »