

385

ASTÉRISQUE

2016

INSTANTON MODULI SPACES AND $\mathcal{W}$ -ALGEBRAS

Alexander BRAVERMAN, Michael FINKELBERG & Hiraku NAKAJIMA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 385, 2016

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOËN
Hélène ESNAULT	
Éric VASSEROT (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 35 € (\$ 52)

Abonnement Europe: 530 €, hors Europe: 569 € (\$ 853)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179
ISBN 978-2-85629-848-0

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

385

ASTÉRISQUE

2016

INSTANTON MODULI SPACES AND $\mathcal{W}$ -ALGEBRAS

Alexander BRAVERMAN, Michael FINKELBERG & Hiraku NAKAJIMA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Alexander Braverman

Department of Mathematics, Brown University, 151 Thayer st., Providence, Rhode Island 02912, USA

Department of Mathematics, University of Toronto and Perimeter Institute of Theoretical Physics, Waterloo, Ontario, Canada, N2L 2Y5

`braval@math.toronto.edu`

Michael Finkelberg

National Research University Higher School of Economics, Russian Federation, Department of Mathematics, 6 Usacheva st., Moscow 119048; Skolkovo Institute of Science and Technology

`finklberg@gmail.com`

Hiraku Nakajima

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

`nakajima@kurims.kyoto-u.ac.jp`

Classification mathématique par sujet (2000). — 14C05; 14D21, 14J60.

Mots-clefs. — AGT, cohomologie d'intersection équivariante, espace de Gieseker, algèbre de Heisenberg, restriction hyperbolique, espace de modules d'instantons, forme de Kac-Shapovalov, accouplement de Poincaré, espace d'Uhlenbeck, enveloppe stable, $\mathcal{W}$ -algèbre, vecteur de Whittaker.

INSTANTON MODULI SPACES AND $\mathcal{W}$ -ALGEBRAS

by Alexander BRAVERMAN, Michael FINKELBERG & Hiraku NAKAJIMA

In memory of Kentaro Nagao

Abstract. — We describe the (equivariant) intersection cohomology of certain moduli spaces (“framed Uhlenbeck spaces”) together with some structures on them (such as e.g., the Poincaré pairing) in terms of representation theory of some vertex operator algebras (“ $\mathcal{W}$ -algebras”).

Résumé — Nous décrivons la cohomologie d’intersection (équivariante) de certains espaces de modules (les « espaces d’Uhlenbeck encadrés ») ainsi que certaines structures sur ces espaces de cohomologie (comme par exemple l’accouplement de dualité de Poincaré) en termes de la théorie des représentation de certaines algèbres vertex (les « $\mathcal{W}$ -algèbres »).

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. Uhlenbeck spaces	1
1.2. Main geometric object	2
1.3. Main algebraic object: $\mathcal{W}$ -algebras	2
1.4. The main result: localized form	4
1.5. Relation to previous works	5
1.6. Hyperbolic restriction	8
1.7. Sketch of the proof	9
1.8. Relation to previous works – technical parts	10
1.9. The main result: integral form	12
1.10. Remarks about non-simply laced case	13
1.11. Further questions and open problems	14
1.12. Organization of the paper	15
1.13. Some notational conventions	15
1.14. Acknowledgments	16
2. Preliminaries	19
2.1. Instanton number	19
2.2. Moduli of framed G -bundles	19
2.3. Stratification	20
2.4. Factorization	20
3. Localization	23
3.1. General Statement	23
3.2. The case of Ext algebras	24
3.3. Attractors and repellents	24
3.4. Hyperbolic restriction	25
3.5. Hyperbolic semi-smallness	26
3.6. Recovering the integral form	27
4. Hyperbolic restriction on Uhlenbeck spaces	29
4.1. A category of semisimple perverse sheaves	29
4.2. Fixed points	30
4.3. Polarization	31

4.4. Definition of hyperbolic restriction functor	32
4.5. Associativity	33
4.6. Preservation of perversity	34
4.7. Hyperbolic restriction on Bun_L^d	34
4.8. Space U^d and its base	35
4.9. Irreducible components	38
4.10. A pairing on U^d	39
4.11. Another base of U^d	39
4.12. Dual base	41
4.13. $\mathrm{Aut}(G)$ invariance	42
5. Hyperbolic restriction in type A	45
5.1. Gieseker-Uhlenbeck	45
5.2. Heisenberg operators	46
5.3. Fixed points and polarization	47
5.4. Stable envelope	49
5.5. Tensor product module	50
5.6. Sheaf theoretic analysis	50
5.7. The associativity of stable envelopes	51
5.8. Space V^d and its base given by irreducible components	52
5.9. A pairing on V^d	55
5.10. Another base of V^d	56
5.11. Computation of the pairing	59
5.12. Relation between V^d and U^d	60
5.13. Compatibility	61
5.14. $\mathrm{Aut}(G)$ invariance	63
6. $\mathcal{W}$-algebra representation on localized equivariant cohomology	65
6.1. Freeness	66
6.2. Another base of U^d , continued	66
6.3. Heisenberg algebra associated with the Cartan subalgebra	67
6.4. Virasoro algebra	69
6.5. The first Chern class of the tautological bundle	71
6.6. $\mathcal{W}$ -algebra representation	72
6.7. Highest weight	73
6.8. Kac-Shapovalov form	75
7. R-matrix	79
7.1. Definition	79
7.2. Factorization	80
7.3. Intertwiner property	80
7.4. Yang-Baxter equation	81
7.5. $SL(2)$ -case	81
7.6. $\mathbb{G}$ -equivariant cohomology	82

7.7. A different proof of the Heisenberg commutation relation	83
8. Whittaker state	85
8.1. Universal Verma/Wakimoto modules	85
8.2. $\mathbb{G}$ -equivariant cohomology	87
8.3. Whittaker condition	87
8.4. Whittaker vector and Kac-Shapovalov form	88
8.5. Lattices	89
8.6. Pairing at $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0$	91
8.7. Proof, a geometric part	92
8.8. Proof, a representation theoretic part	93
8.9. Type A	95
A. Appendix: exactness of hyperbolic restriction	97
A.1. Zastava spaces	97
A.2. Plan of the proof	98
A.3. Attractors and repellents on the Uhlenbeck space: maximal torus case	98
A.4. The map f_d	99
A.5. The central fiber	99
A.6. Good coweights	99
A.7. Exactness of twisted hyperbolic restriction	100
A.8. Exactness of $\Phi_{T,G}$	101
A.9. Exactness of $\Phi_{L,G}$	102
B. Integral form of the $\mathcal{W}$'-algebra	105
B.1. Integral form of the BRST complex	105
B.2. Generators $\widetilde{W}_n^{(\kappa)}$	108
B.3. Grading vs filtration	109
B.4. Specialization at $\varepsilon_1 = 0$	110
B.5. The opposite spectral sequence	112
B.6. Kernel of the screening operator	117
B.7. The embedding $\mathcal{W}'_{\mathbf{A}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{W}'_{\mathbf{A}}(\mathfrak{l})$	118
Bibliography	121
List of notations	127

