BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL BALAZARD

# Remarques sur un théorème de G. Halász et A. Sárközy

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 117, nº 4 (1989), p. 389-413

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_4_389_0>

*Bull. Soc. math. France,*
117, 1989, p. 389–413.

# REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE G. HALÁSZ ET A. SÁRKÖZY

PAR

MICHEL BALAZARD (*)

RÉSUMÉ. — $E$ désigne un ensemble de nombres premiers et $\Omega_E(n)$ le nombre de facteurs premiers de $n$ appartenant à $E$, chacun étant compté avec sa multiplicité. On donne un encadrement uniforme du nombre des entiers $n \leq x$ vérifiant $\Omega_E(n) = k$, étendant un résultat de G. HALÁSZ et A. SÁRKÖZY.

ABSTRACT. — $E$ stands for a set of prime numbers, and $\Omega_E(n)$ for the number of prime factors of $n$ lying in $E$, each counted according to its multiplicity. We give uniform lower and upper bounds for the number of integers $n \leq x$ such that $\Omega_E(n) = k$, thus extending a result of G. HALÁSZ and A. SÁRKÖZY.

## 1. Introduction et énoncé des résultats

L'un des buts de la théorie probabiliste des nombres est de dégager, pour des fonctions définies de manière purement arithmétique, des lois de répartition simples. Ainsi, il est bien connu que le nombre de facteurs premiers d'un entier aléatoire suit approximativement une loi de Poisson. Plus précisément, posons :

$$\Omega(n) = \sum_{p^\nu \| n} \nu, \quad n \text{ entier } \geq 1.$$

Ainsi, $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de l'entier $n$, comptés avec leurs multiplicités. Soit $P_x$ la probabilité uniforme sur l'ensemble des entiers positifs et $\leq x$. Nous avons :

$$(1) \qquad P_x\big(\Omega(n) = k\big) = \frac{1}{\log x} F\Big(\frac{k}{\log\log x}\Big) \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\Big(1 + \mathrm{O}_\varepsilon\Big(\frac{1}{\log\log x}\Big)\Big)$$

(*) Texte reçu le 23 juin 1988, révisé le 26 juin 1989

M. BALAZARD, Univ. de Limoges, Département de Mathématiques, 123 av. Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex, France.

uniformément pour $x \geq 3$ et $1 \leq k \leq (2-\varepsilon)\log\log x$ $(0 < \varepsilon < 1)$, avec

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1}.$$

C'est un résultat dû à L. G. SATHE (*cf.* [19]). Lorsque l'entier $n$ décrit l'intervalle $[1,x]$, $\Omega(n)$ prend toute valeur entière entre 0 et $\log x/\log 2$. La fréquence d'apparition des grandes valeurs de $\Omega(n)$ a été estimée par J.-L. NICOLAS (*cf.* [12]) :

$$P_x\big(\Omega(n) = k\big) = C2^{-k}\log\frac{x}{2^k} + O_\varepsilon\Big(2^{-k}\log^b\Big(\frac{3x}{2^k}\Big)\Big) \tag{2}$$

uniformément pour $x \geq 3$ et $(2+\varepsilon)\log\log x \leq k \leq \log x/\log 2$ $(0 < \varepsilon)$, avec

$$C = \frac{1}{4}\prod_{p\geq 3}\left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{b} = \mathrm{b}(\varepsilon) \in \,]0,1[.$$

Il faut noter la différence de comportement entre (1) et (2) : dans (2), la loi est essentiellement géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Le souci de généraliser ces résultats à une classe importante de fonctions additives a conduit différents auteurs à considérer la fonction

$$\Omega_E(n) = \sum_{p^\nu \| n,\, p\in E} \nu,$$

où $E$ est un ensemble quelconque de nombres premiers. Dans ce qui suit, nous noterons $p_1 < p_2 < \cdots$ la suite des éléments de $E$, et $E(x) = \sum_{p\leq x,\, p\in E}(1/p)$. Le théorème suivant, dû à G. HALÁSZ et A. SÁRKÖZY (*cf.* [7] et [18]) compare la loi locale de $\Omega_E(n)$, pour $1 \leq n \leq x$, avec la loi de Poisson de paramètre $E(x)$ (rappelons que $E(x) = \log\log x + \mathrm{O}(1)$ si $E$ est l'ensemble de tous les nombres premiers).

THÉORÈME A. — *Soit $\delta \in \,]0,1[$. On a :*

$$P_x\big(\Omega_E(n) = k\big) \ll_\delta e^{-E(x)}\frac{E(x)^k}{k!} \tag{3}$$

*pour tout $E$, tout $x \geq 1$ et tout entier naturel $k$ tels que $k+1 \leq (2-\delta)E(x)$ ;*

$$P_x\big(\Omega_E(n) = k\big) \gg_\delta e^{-E(x)}\frac{E(x)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{4}$$

*pour tout $E$, tout $x \geq 1$ et tout entier $k$ tels que $1 \leq k \leq (2-\delta)E(x)$, $E(x) \geq c(\delta)$, où $c(\delta)$ est une constante positive ne dépendant que de $\delta$.*

Nous ferons quatre remarques concernant ce théorème.

1) L'énoncé (4) n'est pas exactement celui donné par A. SÁRKÖZY dans [18] (il suppose $k \geq \delta E(x)$) mais il est facile de voir que sa démonstration donne bien (4).

2) Le décalage d'exposant qu'on observe entre (3) et (4) est inévitable comme le montrent (1) et, par exemple, [3]. Il est dû au fait qu'on ne peut pas prévoir l'ordre de grandeur de $P_x(\Omega_E(n)=0)$ en ne connaissant que $E(x)$, indépendamment de la distribution des nombres premiers $p \in E$, $p \leq x$ : c'est le problème du petit crible (*cf.* [5] et [9]).

3) Un aspect important du THÉORÈME A est son effectivité. Les constantes impliquées par les notations de Vinogradov $\ll_\delta$ et $\gg_\delta$ ne dépendent que de $\delta$ : en particulier l'entier naturel $k$ et l'ensemble $E$ peuvent dépendre de $x$. C'est pourquoi ce théorème et ses variantes sont des outils précieux de la théorie analytique des nombres, notamment dans l'étude fine des diviseurs (*cf.* l'ouvrage récent [8]).

4) Deux formules asymptotiques précisant (3) et (4) ont été établies par G. HALÁSZ. La première, effective quand $k \sim E(x)$, est l'objet de l'article [6]. La seconde est citée à la fin du chapitre 21 de [4] et fournit un équivalent de $P_x(\Omega_E(n)=k)$ si $\delta E(x) \leq k \leq (2-\delta)E(x)$ et $E(x) \to +\infty$ (*cf.* également [1]).

En ce qui concerne la fréquence d'apparition des grandes valeurs de $\Omega_E(n)$ (quand $1 \leq n \leq x$, $\Omega_E(n)$ prend toute valeur entière entre 0 et $\log x/\log p_1$) on dispose du résultat suivant, dû à K. K. NORTON (*cf.* [14, III]).

THÉORÈME B. — *Pour tout $E$, tout $x \geq 1$ et tout entier naturel $k$, on a :*

$$P_x\big(\Omega_E(n) \geq k\big) \ll_{p_1} p_1^{-k}\sqrt{1+E(x)}\exp\big((p_1-1)E(x)\big); \tag{5}$$

*pour tout $E$, tout $x \geq 1$ et tout entier naturel $k$ tels que $0 \leq k \leq \log x/\log p_1$, on a :*

$$P_x\big(\Omega_E(n) \geq k\big) \geq \frac{1}{2}p_1^{-k}. \tag{6}$$

K. K. NORTON a, d'autre part, annoncé (*cf.* [14, IV]).

THÉORÈME C. — *Soit $x > 3$, $(\log x)^{-1} < \varepsilon < 1$, et supposons que*

$$E(x) > -2(p_1+2)\log\varepsilon + c_1(p_2),$$
$$p_1E(x) - \{p_1E(x)\}^{1/2} \leq k \leq (1-\varepsilon)(\log x)(\log p_1)^{-1}.$$

*Alors*

$$(7) \qquad c_2(p_2)p_1^{-1}\exp\{(p_1-1)E(x)\}\varepsilon^{p_1} \leq P_x(\Omega_E(n)\geq k) \leq c_3(p_2)p_1^{-k}\exp\{(p_1-1)E(x)\}$$

*où chaque $c_i(p_2)$ est positive et ne dépend que de $p_2$.*

Le THÉORÈME C précise dans une certaine mesure le THÉORÈME B en montrant que pour les valeurs de $k \geq p_1E(x)$, la loi $P_x(\Omega_E(n)\geq k)$ est essentiellement géométrique de raison $1/p_1$. On retrouve ainsi dans le cas général la dichotomie observée dans le cas où $E$ est l'ensemble de tous les nombres premiers.

On voit donc que notre connaissance du comportement local de $\Omega_E$ est imparfaite et c'est dans ce contexte que Jean-Louis NICOLAS nous en a proposé l'étude. Afin d'énoncer le résultat de nos recherches, nous définissons une certaine classe de lois de probabilité :

*Définition.* — On appelle loi Poisson–géométrique de paramètre $\lambda \geq 0$ et de raison $r \in ]0,1[$, le produit de convolution $p * g$ de la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ($p_k = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k \in \mathbb{N}$) et de la loi géométrique de raison $r$ ($g_k = (1-r)r^k$, $k \in \mathbb{N}$). On a :

$$(p*g)_k = (1-r)e^{-\lambda}r^kS_k\Big(\frac{\lambda}{r}\Big)$$

où $S_k(X) = 1 + X + \cdots + X^k/k!$ désigne la $k$-ième somme partielle de la série de $\exp X$.

L'ordre de grandeur des quantités $S_k(X)$ est bien connu (*cf.* [15]). On a en particulier

$$\begin{aligned} S_k(X) &\asymp \frac{X^k}{k!} \quad \text{si } k \leq \alpha X, \quad \alpha \text{ fixé dans } [0,1[\\ S_k(X) &\asymp e^X \quad \text{si } k \geq \beta X, \quad \beta \text{ fixé dans } ]1,+\infty[. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} (p*g)_k &\asymp (1-r)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} && \text{si } k \leq \alpha\frac{\lambda}{r},\ \alpha \text{ fixé dans } [0,1[\\ &\asymp (1-r)e^{\lambda(1/r-1)}r^k && \text{si } k \geq \beta\frac{\lambda}{r},\ \beta \text{ fixé dans } ]1,+\infty[. \end{aligned}$$

La loi Poisson-géométrique a donc un double comportement : pour $k \leq \alpha\lambda/r$, elle ressemble à une loi de Poisson et pour $k \geq \beta\lambda/r$ elle ressemble à une loi géométrique, la transition ayant lieu dans la