BULLETIN DE LA S. M. F.

WOLFGANG BERTRAM

Un théorème de Liouville pour les algèbres de Jordan

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 2 (1996), p. 299-327
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_2_299_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 299–327.

UN THÉORÈME DE LIOUVILLE POUR LES ALGÈBRES DE JORDAN

PAR

WOLFGANG BERTRAM (*)

RÉSUMÉ. — Un théorème classique de Liouville décrit les transformations conformes d'un espace vectoriel euclidien. Nous généralisons ce théorème aux algèbres de Jordan simples (et non isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La première partie de la preuve est purement algébrique. Nous y montrons que l'algèbre de Lie du groupe de structure d'une algèbre de Jordan simple est de type fini et d'ordre 2. Dans la deuxième partie de la preuve nous en déduisons la description des transformations d'une algèbre de Jordan simple qui sont conformes par rapport au groupe de structure de l'algèbre de Jordan. Elles forment une groupe de Lie de transformations birationnelles qui est connu comme *groupe de Kantor-Koecher-Tits*, et nous pouvons caractériser ce groupe comme le groupe des transformations conformes de la complétion conforme de l'algèbre de Jordan.

ABSTRACT. — We give a generalization for Jordan algebras of the classical Liouville theorem describing the conformal transformations of a euclidean vector space. In a first step we establish an infinitesimal version which is purely algebraic; namely, we show that the structure Lie algebra of a simple Jordan algebra (not isomorphic to $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) is of finite order 2. In a second step, using only elementary calculus and Lie theory, we deduce the global version describing the transformations of a simple Jordan algebra which are conformal with respect to the structure group of the Jordan algebra. It turns out that these transformations form a Lie group of birational transformations, also known as the *Kantor-Koecher-Tits group*, and we can caracterize this group as the group of conformal transformations of the conformal closure of the Jordan algebra.

0. Introduction

0.1. Le théorème classique de Liouville.

Une *transformation conforme* de l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard est un difféomorphisme $\phi : V_1 \to V_2$ d'un

(*) Texte recu le 31 janvier 1995, révisé le 27 septembre 1995, accepté le 26 novembre 1995.
W. BERTRAM, Institut de Mathématiques, UMR 9994 du CNRS, Université Paris VI, 4, place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05 (France).
Classification AMS : 17B70, 17C30, 34A26, 53A30, 53C10.

domaine V_1 de V sur un autre V_2 tel que pour tout $x \in V_1$, la différentielle $D\phi(x)$ de ϕ au point x soit un multiple d'une transformation orthogonale :

$$\forall x \in V_1,\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : \quad D\phi(x) \circ {}^tD\phi(x) = \lambda\, \mathrm{id}_V .$$

En d'autres termes, pour tout $x \in V_1$, $D\phi(x)$ appartient au sous-groupe G de $\mathrm{Gl}(V)$ engendré par $\mathrm{O}(3)$ et les multiples non-nuls de l'identité. Il est évident que les translations par les vecteurs de V et les éléments de G sont des transformations conformes. Un calcul élémentaire montre que la transformation

$$j : V_1 = V - \{0\} \longrightarrow V_1, \quad x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2},$$

est conforme. Un théorème de Liouville [L1850] affirme que toute transformation conforme de classe $\mathcal{C}^4$ est une composée des précédentes. Ce théorème a été généralisé par S. Lie aux espaces vectoriels $V = \mathbb{R}^n$ pour $n > 2$, munis d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, voir [DNF79, p. 140]. De plus, les transformations conformes forment un groupe de Lie d'applications birationnelles de V. Dans le cas classique, ce groupe est isomorphe à $\mathrm{O}(4,1)$, voir [DNF79]. Remarquons le caractère exceptionel des cas où la dimension de V est égale à 1 ou 2 : dans ces cas, tout difféomorphisme (resp., toute application biholomorphe) est conforme, et les transformations conformes ne constituent pas un groupe de Lie de dimension finie. Nous allons généraliser ces résultats dans un cadre naturel qui est celui des *algèbres de Jordan simples*, et qui est en correspondance biunivoque avec celui des *espaces préhomogènes symétriques irréductibles.*

0.2. Transformations conformes généralisées et espaces préhomogènes symétriques.

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et G un sous-groupe fermé de $\mathrm{Gl}_{\mathbb{K}}(V)$. Appelons *transformation G-conforme* un difféomorphisme $\varphi : V_1 \to V_2$ d'un ouvert connexe V_1 de V sur un autre V_2, tel que pour tout $x \in V_1$, la différentielle $D\varphi(x)$ appartienne au groupe G. Par exemple, le sous-groupe P du groupe affine engendré par G et les translations par les éléments de V est un groupe de transformations G-conformes. La composée de deux transformations G-conformes, restreinte à un domaine où elle est définie, est encore une transformation G-conforme. L'ensemble $\mathrm{Co}(G)$ des transformations G-conformes n'est en général pas un groupe, mais un *pseudogroupe de difféomorphismes* (voir la définition p. 34 dans [Ko72]; nous n'utiliserons pas ce concept dans ce travail).

Pour définir la généralisation de l'inversion j considérée ci-dessus, nous introduisons le concept d'*espace préhomogène symétrique* :

DÉFINITION 0.2.1. — Un *espace préhomogène symétrique* (G, σ, V, e) est la donnée d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'un sous-groupe fermé G de $\mathrm{Gl}(V)$, d'un point $e \in V$ tel que l'orbite $\Omega := G \cdot e$ soit ouverte dans V (*i.e.*, (G, V) est un espace préhomogène) et tel que $\Omega \cong G/H$ soit un espace symétrique ; c'est-à-dire, que le stabilisateur H de e dans G est compris entre le groupe G^σ des points fixes d'une involution non-triviale $\sigma : G \to G$ et sa composante neutre G_0^σ. Nous dirons que cet espace est *irréductible* (resp. *complètement réductible*) si V est un G-module irréductible (resp. complètement réductible).

Les exemples mentionnés dans la section précédente sont de tels espaces : si V est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée B, nous choisissons $e \in V$ tel que $B(e, e) = 1$. Définissons un automorphisme J de V par $J(e) = e$ et $J_{|e^\perp} = -\mathrm{id}_{e^\perp}$ et une involution σ du groupe $G = \mathrm{SO}(B) \times \mathbb{K}^* \mathrm{id}_V$ par

$$\sigma(g, \lambda \,\mathrm{id}_V) := (JgJ, \lambda^{-1} \mathrm{id}_V).$$

Il est un fait élémentaire que l'orbite $\Omega = G \cdot e$ est ouverte dans V, et (G, σ, V, e) est alors un espace préhomogène symétrique irréductible. Pour tout espace préhomogène symétrique (G, σ, V, e) notons

$$\sigma_e : \Omega \longrightarrow \Omega, \quad ge \longmapsto \sigma(g)e,$$

la symétrie de l'orbite ouverte $\Omega \cong G/H$ par rapport au point de base e. Alors $-\sigma_e$ est une transformation G-conforme. En effet, soit $x = ge \in \Omega$. Nous avons

$$\begin{aligned}\big(D(-\sigma_e)\big)(x) = -(D\sigma_e)(ge) &= -D(\sigma_e \circ g)(e) \circ g^{-1} \\ &= -D\big(\sigma(g) \circ \sigma_e\big)(e) \circ g^{-1} \\ &= -\sigma(g) \circ (D\sigma_e)(e) \circ g^{-1} \\ &= \sigma(g) g^{-1},\end{aligned}$$

ce qui appartient bien à G. Remarquons que σ_e n'a que des points fixes isolés dans Ω, contrairement à l'involution j de l'exemple précédent. En effet, celle-ci est la composée de σ_e et de la réflexion J.

0.3. Le théorème généralisé et les algèbres de Jordan.

Le théorème suivant (th. 2.3.1) généralise le théorème de Liouville :

THÉORÈME. — *Soit (G, σ, V, e) un espace préhomogène symétrique irréductible qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors toute transformation*

G-conforme de classe C^4 est une composée de translations par des éléments de V, d'éléments de G et de $-\sigma_e$, où σ_e est la symétrie de l'orbite ouverte symétrique Ω.

La démonstration de ce théorème se divise nettement en deux parties indépendantes : dans la première partie, qui est purement algébrique, nous montrons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ du groupe G est *de type fini*; *i.e.* l'espace $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ des *champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes sur V* (ce sont les champs de vecteurs ξ vérifiant $D\xi(x) \in \mathfrak{g}$ pour x appartenant à un ouvert de V) est de dimension finie (voir définition dans la section 1.1).

Plus précisément, nous montrons que $\mathfrak{g}$ est d'ordre 2 (on dit que $\mathfrak{g}$ est *de type fini d'ordre k* si $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de champs de vecteurs polynomiaux de degré au plus k ; voir lemme 1.1.2). Ceci peut être regardé comme une version infinitésimale du théorème envisagé (th. 1.3.2). Dans la deuxième partie, nous en déduisons la version globale (th. 2.3.1). En fait, nous établissons un résultat plus général (th. 2.1.4 et 2.2.1) :

THÉORÈME. — *Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ une algèbre de Lie de type fini qui est égale à son normalisateur dans $\mathfrak{gl}(V)$ et telle que* $\mathrm{id}_V \in \mathfrak{g}$, *et soit G le normalisateur de $\mathfrak{g}$ dans* $\mathrm{Gl}(V)$. *Alors toute transformation G-conforme est birationelle, et ces applications birationelles de V forment un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes.*

Ce résultat peut être considéré comme un raffinement pour certains cas d'un théorème dû à Sternberg [St64, p. 348] affirmant que *le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini est un groupe de Lie.* Cependant, notre démonstration est tout à fait élémentaire et n'utilise pas la théorie des *G-structures.* En fait, il s'agit ici d'une G-structure plate sur un espace vectoriel, et dans ce cas, quelques lemmes de calcul différentiel (annexe (A1)–(A4)) peuvent servir à remplacer la théorie des G-structures.

Plus précisément, si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est de type fini k, nous montrons que toute transformation G-conforme induit un automorphisme ϕ_* de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes; nous en déduisons que ϕ est rationelle et déterminée par son k-jet en un point p de son domaine de définition. Nous décrivons ces k-jets et ainsi l'ensemble $\mathrm{Co}(G)$ des transformations G-conformes (th. 2.1.4). Cet ensemble n'est pas toujours un groupe car le prolongement rationel d'une transformation G-conforme ne doit pas être G-conforme. Cependant, cette propriété est vérifiée sous l'hypothèse d'auto-normalisation de G exprimée ci-dessus.

La division en deux parties du raisonnement met en évidence que la partie, où la géométrie des espaces préhomogènes symétriques entre