BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTOPHE MOUROUGANE

Théorèmes d'annulation générique pour les fibrés vectoriels semi-négatifs

Bulletin de la S. M. F., tome 127, nº 1 (1999), p. 115-133
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_1_115_0>

Bull. Soc. math. France,
127, 1999, p. 115–133.

THÉORÈMES D'ANNULATION GÉNÉRIQUE POUR LES FIBRÉS VECTORIELS SEMI-NÉGATIFS

PAR CHRISTOPHE MOUROUGANE (*)

RÉSUMÉ. — Green et Lazarsfeld ont démontré des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels pour la cohomologie des fibrés vectoriels plats sur les variétés kählériennes compactes. Nous généralisons ces résultats aux cas des fibrés vectoriels semi-négatifs. Les outils principaux sont fournis par une étude des formes harmoniques à valeurs dans un fibré vectoriel semi-négatif.

ABSTRACT. — GENERIC VANISHING THEOREMS FOR SEMI-NEGATIVE VECTOR BUNDLES. — We generalize Green and Lazarsfeld theorems about generic vanishing for cohomology groups of flat vector bundles to the case of semi-negative vector bundles, over compact Kaehler manifolds. We also describe the structure of exceptional sets. Main tools are provided by a study of harmonic forms with values in a semi-negative vector bundle.

1. Introduction

Dans tout ce texte, (X,ω) désignera une variété kählérienne compacte connexe lisse de dimension n, et $F \to X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Nous noterons $\mathrm{Pic}^0(X)$ le tore complexe qui paramètre les classes d'isomorphie de fibrés en droites topologiquement triviaux sur X (*i.e.* de première classe de Chern nulle). Pour tout élément y de $\mathrm{Pic}^0(X)$, la notation λ_y désignera un représentant de y. Pour $(p,q,m) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^\star$, nous étudions les lieux exceptionnels de cohomologie de Dolbeault des déformations de F par produit tensoriel par les fibrés en droites topologiquement

(*) Texte reçu le 16 juin 1998, accepté le 19 octobre 1998.
Ch. MOUROUGANE, Institut de Mathématiques de Jussieu, boîte 247, 75252 Paris CEDEX 05.
Classification AMS : 32L20, 14C30, 32C17.

Mots clés : variétés kählériennes compactes lisses, fibrés vectoriels holomorphes, notions de positivité, théorèmes d'annulation, lieux exceptionnels de cohomologie, méthodes transcendantes.

triviaux :

$$S_m^{p,q}(X,F) := \{y \in \mathrm{Pic}^0(X)\,;\ h^{p,q}(X, F \otimes \lambda_y) \geq m\}.$$

S'il n'y a pas de risque de confusion, nous omettrons X dans la notation $S_m^{p,q}(X,F)$. Si p est nul, nous l'omettrons; de même, si m vaut 1, nous l'omettrons. Plus généralement, pour tout morphisme $a : X \to A$ de X dans un tore complexe, nous étudions

$$S_m^{p,q}(X,F,a) := \{y \in \mathrm{Pic}^0(A)\,;\ h^{p,q}(X, F \otimes a^\star\lambda_y) \geq m\}.$$

Par utilisation des techniques de déformation de groupes de cohomologie, Green et Lazarsfeld ont obtenu des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels de cohomologie pour les fibrés topologiquement triviaux [GL87], [GL87′], [GL91]. Cette restriction est due à l'utilisation de la théorie de Hodge comme argument ultime.

Au paragraphe 2, nous étudions des notions de semi-négativité pour obtenir des outils analytiques analogues à ceux fournis par la théorie de Hodge. Nous étudions en particulier, suivant les résultats de Kollár [Ko86], les morphismes de produit tensoriel par une section agissant sur la cohomologie des fibrés semi-négatifs.

Nous étendons au paragraphe 3 les théorèmes d'annulation générique aux fibrés semi-négatifs.

Nous obtenons au paragraphe 4, sous des hypothèses de semi-négativité analytiques ou algébriques sur F, la structure linéaire des lieux exceptionnels. En découlent des propriétés de périodicité de la fonction $k \mapsto h^q(X, F \otimes \mu^k)$ où F est un fibré vectoriel semi-négatif et μ un fibré en droites numériquement plat [CS93].

Au paragraphe 5, nous étendons les résultats précédents au cas de la cohomologie des déformations d'un fibré en droites numériquement effectif et abondant sur une variété projective.

Nous montrons au paragraphe 6 comment obtenir des résultats pour les fibrés vectoriels.

Le résultat principal est :

Théorème. — *Soient (X,ω) une variété kählérienne compacte lisse et $F \to X$ un fibré vectoriel holomorphe qui vérifie l'une des hypothèses de négativité suivantes :*

- *F est un fibré vectoriel hermitien de dual semi-positif au sens de Nakano ;*
- *F est un fibré en droites de dual numériquement effectif et abondant sur X supposée projective ;*

• *F s'écrit $S^kE \otimes \det E$, où E est un fibré vectoriel de dual numériquement effectif et abondant sur X supposée projective.*

Alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le lieu exceptionnel $S^q(F)$ est un ensemble analytique, réunion finie de translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension respectivement strictement supérieure à* $\dim \alpha(X) - 1 - q$, $\dim \alpha(X) - 1 - q$ *ou* $\dim \alpha(X) - \mathrm{rang}(E) - q$ *respectivement.*

Ici $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est le morphisme d'Albanese de X et $\dim \alpha(X)$ la dimension de son image.

H. Dunio a obtenu sur les variétés projectives, des théorèmes d'annulation générique pour les fibrés en droites de dual semi-ample ou abondant en les déduisant par construction de revêtements cycliques, de théorèmes sur les fibrés en droites topologiquement triviaux (voir [EV92]).

Je tiens à remercier I. Biswas, Th. Bouche, J.-P. Demailly, et Ph. Eyssidieux pour d'utiles indications.

2. Notions de semi-négativité

2.1. Définitions et propriétés.

Soient la variété (X, ω) et le fibré vectoriel $F \to X$ comme dans l'introduction. On munit F d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les métriques ω et h permettent de définir sur l'espace des formes différentielles à valeurs dans F un produit scalaire global noté $\langle\!\langle\, ,\rangle\!\rangle$. On note :

• $D := D' + D''$ la connexion de Chern sur le fibré holomorphe hermitien (F, h) ;

• $\delta := \delta' + \delta''$ l'adjoint de D pour le produit scalaire $\langle\!\langle\, ,\rangle\!\rangle$;

• Λ l'adjoint de la multiplication extérieure par ω notée L agissant sur les formes différentielles à valeurs dans F ;

• Δ (resp. Δ', Δ'') le Laplacien associé à l'opérateur D (resp. D', D'') ;

• $\mathcal{H}^{p,q}(X, F, \omega, h)$ l'espace des (p,q)-formes Δ''-harmoniques à valeurs dans le fibré hermitien (F, h) ;

• $\mathcal{H}^{0,1}(X, \omega)$ l'espace des $(0,1)$-formes harmoniques.

Dans ce contexte, on dispose :

• des identités de Hodge :

$$[\delta'', L] = iD', \quad [\delta', L] = -iD'', \quad i.e. \quad [\delta, L] = i(D' - D''),$$
$$[D'', \Lambda] = i\delta', \quad [D', \Lambda] = -i\delta'' ;$$

- de la relation
$$\Delta = \Delta' + \Delta'',$$
entre Laplaciens (conséquence de $[D', \delta''] = 0$ et de $[D'', \delta'] = 0$) ;
- de la relation de commutation
$$[\Delta, L] = 0$$
(conséquence par l'identité de Jacobi de l'identité $[D, [\delta, L]] = 0$) ;
- de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano :
$$\Delta'' = \Delta' + \big[ic_h(F), \Lambda\big].$$

L'opérateur $[ic_h(F), \Lambda]$ agit ponctuellement de la manière suivante. En notant

- x un point de la variété X,
- $(\mathrm{d}z_\ell)$ une base ω_x-orthonormée de $T^\star_x X$,
- (e_λ) une base h_x-orthonormée de F_x,
- $\omega_x = i \sum_\ell \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell$,
- $ic_h(F)_x = i \sum\limits_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k e^\star_\lambda \otimes e_\mu$,
- $u = \sum\limits_{\substack{\lambda, |I|=p \\ |J|=q}} u^\lambda_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \otimes e_\lambda \in \overset{p,q}{\wedge} T^\star_x X \otimes F_x$,

et en convenant que les tenseurs $u^\lambda_{I,J}$ sont alternés en les multi-indices I et J, on a :

$$\begin{aligned}
\big\langle [ic_h(F), \Lambda] u, u \big\rangle \; &= \sum_{\substack{|I'|=p-1 \\ |J|=q}} \sum_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu}\, u^\lambda_{kI',J}\, \overline{u^\mu_{jI',J}} \\
&\quad + \sum_{\substack{|I|=p \\ |J'|=q-1}} \sum_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu}\, u^\lambda_{I,jJ'}\, \overline{u^\mu_{I,kJ'}} \\
&\quad - \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{j\lambda\mu} c_{jj\lambda\mu}\, u^\lambda_{I,J}\, \overline{u^\mu_{I,J}}.
\end{aligned}$$

DÉFINITION 2.1. — On dira que le fibré vectoriel F est (p,q)-*semi-positif* s'il peut être muni d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que